

NOMBRES ET OPÉRATIONS :
PREMIERS APPRENTISSAGES

Lycée Buffon, Paris XV
12-13 novembre 2015

QUESTION 2

Quelles difficultés dans l'écriture des nombres ?

Marie-Pascale Noël

Les nombres verbaux

- Une trentaine de primitives lexicales
 - Un ...neuf, dix, onze ...seize, vingt, trente...nonante, cent, mille, million
- Structures des nombres verbaux
 - Représentation en base 10 peu transparente
Deux mille (2×10^3) trois cents (3×10^2)
soixante (6×10), seize (!), quatre-vingt-douze (!)
 - Relations additives
Cent-cinq: [100] + [cinq]
 - Relations multiplicatives
Cinq-cents: [5] \times [100] => ordre des mots !

Les nombres arabes

- CP
 - Lire et écrire les chiffres de 1 à 9
- CE1
 - Lire et écrire les nombres à 2 chiffres et début des nombres à 3 chiffres (77% RC)
- CE2: lecture et écriture des nombres à 4 chiffres

Les nombres arabes

- Seulement 10 primitives lexicales: 0,1,2,...,9
- Système en base 10 positionnel
 - 2, 23, 254: valeur du chiffre dépend de sa position (calculée à partir de la droite) dans le nombre:
 - $[2] \times 10^0$, $[2] \times 10^1$, $[2] \times 10^2$: deux, vingt, deux cents
 - *Valeur de surface \neq valeur positionnelle*
 - 12 \neq 21

Même valeur de surface

\neq valeurs positionnelles (le « 1 » représente les dizaines vs les unités)

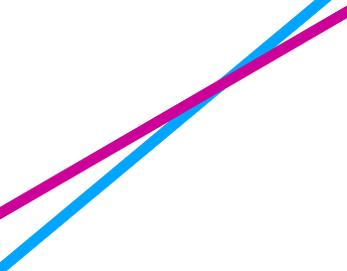
Le transcodage

- Ces \neq entre codes rendent la « traduction » d'un code à l'autre peu aisée
 - Lire « 1205 » \neq « un deux zéro cinq »
 - Écrire « mille cinq cent trois » \neq 1000 5 100 3
- Évolution de cet apprentissage
 - Relation additive DU (23)
 - Relation produit UC (300)
 - Relation additive à cent: CU (105)

(Seron, Deloche, Noël, 91; Seron & Fayol, 94)

Le transcodage

- 2 types d'erreurs
 - Lexicales: un mot/chiffre pour un autre
neuf => 6; seize => 13
Surtout en CP
 - Syntaxiques: gérer les relations entre mots ou chiffres
Vingt-sept => 207; trois cents => 3100;
834 => quatre-vingt trente quatre; ...

- 
- Pour comprendre les nombres arabes ou passer du code arabe au code verbal et inversement, deux acquisitions sont nécessaires:
 - Comprendre la représentation en base 10
 - Comprendre le système positionnel

Comprendre la base 10

- Notre système verbal est en base 10, mais avec peu de transparence
 - Beaucoup de langues asiatiques sont transparentes à la base 10:
 - 274 se dit « deux cents sept dix quatre »
 - Apprentissage plus rapide de la suite du comptage
 - Meilleure compréhension de la base 10
 - Meilleures performances en transcodage

Comprendre la base 10

- Notre système verbal est en base 10, mais avec peu de transparence
 - Le français de Belgique est plus transparent que le français de France:
 - 78: septante-huit vs soixante-dix-huit
 - 97: nonante-sept vs quatre-vingt-dix-sept
 - Dictée de nombres à 7 ans
 - 78, 97 ne posent pas problème aux belges
 - Erreurs chez les français du type 6018, 618, pour 78 ou bien 42017, 4117, 817 pour 97 (Seron & Fayol, 1994)

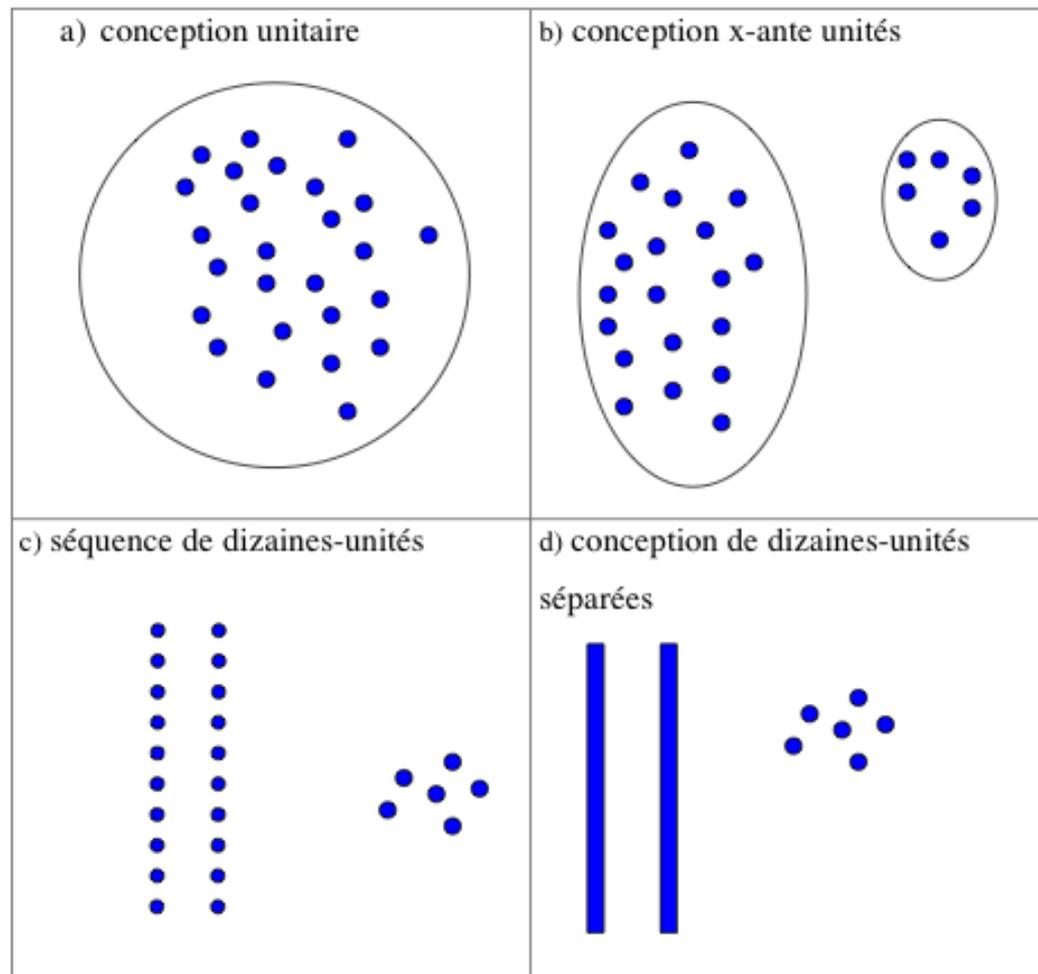
Comprendre la base 10

- Les difficultés des élèves français semblent venir d'une incompréhension des nombres verbaux
 - Sélectionner des jetons de valeur 1 ou 10
 - « soixante-dix-neuf » => erreurs du type
 - 7 jetons de 10 et 19 de 1
 - 6 jetons de 10 et 9 jetons de 1
- => important de travailler la compréhension de la base 10 à l'oral:
 - les allumettes, les paquets de 10 allumettes, la dizaine d'allumettes: notion d'équivalence

Conception en base 10

Conceptions

- Unitaire
- X-ante unités
- Paquets de 10 & unités
- Dizaines-unités



Le système positionnel

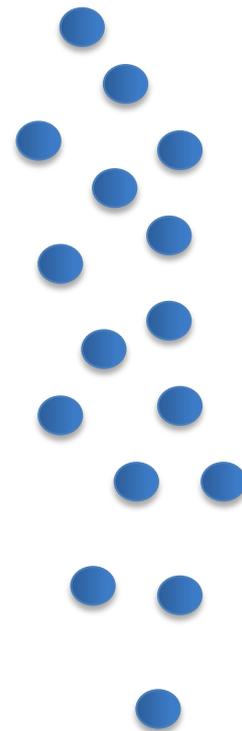
- Comprendre comment la représentation en base 10 s'exprime dans le code arabe par le système de position
 - Le premier rang à droite exprime les unités
 - Le second les dizaines
 - Le troisième les centaines etc.
- Une aide à ce niveau: l'abaque

Dizaines	Unités

Centaines	Dizaines	Unités

Un défi dans l'apprentissage

- Dessiner 16 roues puis montrer celles correspondant aux chiffres 1 et 6 (Kamii (1982))
 - 6 ans: entourent 1 et 6 roues
 - Réponse correcte chez 12% des enfants de 7 ans
 - Réponse correcte chez 42% des enfants de 9 ans
 - Réponse correcte chez 78% des étudiants de 13 ans !
- Collet (2004)
 - Construire une collection équivalente à un NA puis montrer la part correspondant au chiffre des U puis celle correspondant au chiffre des dizaines
 - Nombres arabes: 23, 34 et 42
 - Réussite chez 44% des enfants de CP et 85% en CE1



Impact sur le calcul

- Sur le calcul mental
 - 25 + 13: avec une conception unitaire du nombre, seule stratégie possible, *counting min* 25,26,27...38
 - 28 + 13: avec une conception en base 10 limitée, risque de traiter les chiffres des D (2+1=3) et des U (8+3=11) et de produire 311 comme réponse
 - La compréhension de la base 10 et du système positionnel permet ≠ stratégies de calcul
Traiter séparément les D et U et puis les regrouper
Ajouter les D au 1^{er} terme, puis les U
 - ...L'abaque peut aider

Dizaines	Unités
2	8
1	3

Fuson, Smith, Lo Cicero, 97

Impact sur le calcul

- Sur le calcul écrit en colonnes
 - Importance d'une conception en base 10 et d'une compréhension du système positionnel des nombres pour comprendre le positionnement des nombres en calcul écrit
 - Autrement: procédures = algorithmes abscons, non soutenus par de la compréhension, grand risque d'erreurs
 - L'abaque peut également soutenir cet apprentissage
- 230 + 85

Centaines	Dizaines	Unités
2	3	0
	8	5

Impact sur le calcul

- Ho & Chen (97): travaillent la base 10-positionnelle chez des enfants de 1^{ière} année (CP)
- 5 séances d'1h
 - Comptent des pailles; quand 10: 1 fagot; quand 10 fagots: 1 verre
 - Exercices d'ajouts et de retraits => ouvrir des fagots; échanger regrouper des fagots en verre ...
 - X fagots et x pailles: montrer combien cela fait de pailles en nombres arabes, pour les fagots et pour les pailles seules (exple: 2 fagots = 20 pailles)
- => Amélioration de la compréhension de la valeur positionnelle et effet sur l'addition (pas sur la soustraction)

Les nombres décimaux

- Le système en base 10, positionnel, régit aussi les nombres décimaux
- difficulté dans cet apprentissage liée au biais des nombres naturels (Ni & Zhou, 2005)
 - Exple: 0,345 jugé $>$ 0,67
 - Quand grandeur relative du nombre rationnel est incongruente avec grandeur relative des « nombres naturels »:
20% de réponses correctes en CE2 et CM1
Exple: 0,09 jugé $>$ 0,2 (Desmet, Grégoire & Mussolin, 2010)

Les nombres décimaux

Valeurs de position

- Nombres naturels: le rang positionnel se calcule à partir de la droite du nombre en **allant vers la gauche**

3 32 352 3572

– 2 unités partout

– 3 unités, dizaines, centaines, milliers => augmente !

- Nombres décimaux: le rang positionnel se calcule à partir de la droite de la **virgule**, en **allant vers la droite**

0,3 0,32 0,352 0,3572

– 2 centièmes, 2 millièmes, 2 dix millièmes => diminue !

– 3 dixièmes partout

Les nombres décimaux

- Ajouter un 0 à la droite du nombre
 - Change la grandeur du nombre entier
 $35 \Rightarrow 350$
 - Ne modifie pas la valeur du nombre décimal
 $0,35 = 0,350$
- Le nom des unités considérées
 - Est implicite – non-dit pour les naturels
 $47 = 47$ unités
 - Doit être spécifié pour les décimaux
 $0,47$: 47 centièmes

Conclusion

- Deux apprentissages fondamentaux
 - La compréhension de la base 10 (déjà sur nombres verbaux)
 - La compréhension du système positionnel arabe
- Pour les nombres écrits en chiffres: les naturels et les décimaux

Marie-Pascale Noël

Professeure à l'Université Catholique de Louvain,
Louvain-la-Neuve, Belgique