NOMBRES ET OPÉRATIONS :
PREMIERS APPRENTISSAGES

Lycée Buffon, Paris XV
12-13 novembre 2015

Quelles difficultés rencontrent les élèves quand ils ont à effectuer des opérations ?

Lieven Verschaffel

Université catholique de Louvain, Belgique

cnesco conseil national d'évaluation du système scolaire

ifé INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

Quatre choix pour le (jeune) mathématicien

1. Quelle(s) opération(s) ai-je à effectuer?

2. Comment vais-je m'y prendre pour effectuer l'opération (ou les opérations) que j'ai à faire?

3. Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

4. A quel point le modèle mathématique que j'utilise est-il adapté au problème que j'ai à traiter?

Quatre choix pour le (jeune) mathématicien

1. Quelle(s) opération(s) ai-je à effectuer?

2. Comment vais-je m'y prendre pour effectuer l'opération (ou les opérations) que j'ai à faire?

3. Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

4. A quel point le modèle mathématique que j'utilise est-il adapté au problème que j'ai à traiter?

+, -, x ou : ?

Facile

- 4 + 5 =*?* ou 20 : 4 =*?*
- Pierre a 5 pommes et Marie a 3 pommes. Combien de pommes ont-ils à eux deux?

Difficile

- 4 + ? = 9 ou 4 × ? = 20,
- Pierre a 5 billes. Marie a 2 billes. Combien de billes Pierre a-t-il de plus que Marie?

3 fois “9 – 6 =?“

Pierre a **9** pommes. Il donne **6** pommes à Anne. Combien de pommes a-t-il maintenant?

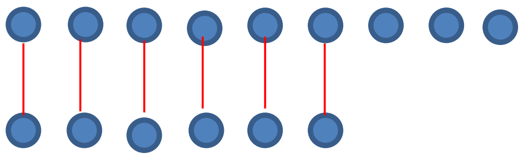
Pierre et Anne ont **9** pommes à eux deux. Pierre a **6** pommes. Combien de pommes Anne a-t-elle?

Pierre a **9** pommes. Il a **6** pommes de plus qu’Anne. Combien de pommes Anne a-t-elle?

Solutions formelles vs informelles

- *Problème*: Anne a 6 pommes. Pierre a 9 pommes. Combien Pierre a-t-il de pommes de plus qu'Anne?

- *Stratégie:* correspondance terme à terme



- *Ecritures avec des nombres*:
  - Je ne sais pas comment l'écrire
  - 6 … 9 = 3
  - 6 + 9 = 3
  - 6 + 3 + 6 = 3
  - 6 plus 9 = 3

Modèles situationnels des opérations

- a – b = ?
  - Retrait (retirer *b* de *a*)
  - Ecart (différence entre *a* et *b*)

- a x b = ?
  - Parts égales (*a* parts de *b* éléments)
  - Agrandissement (agrandir *b* *a* fois)
  - Rectangle (*a* lignes de *b* colonnes)
  - Produit cartésien (nombre total de combinaisons de *a* et *b* éléments)

Compréhension intuitive de la soustraction comme "retrait"

Facile

- Pierre a 5 pommes. Il donne 3 pommes à Marie. Combien de pommes a-t-elle maintenant?

Difficile

- Pierre a 5 billes. Marie a 2 billes. Combien de billes Pierre a-t-il de plus que Marie?
- Pierre a 3 pommes. Il reçoit quelques pommes de Marie. Maintenant il a 5 pommes. Combien de pommes Marie lui a-t-il données?

Quatre choix pour le (jeune) mathématicien

1. Quelle(s) opération(s) ai-je à effectuer?

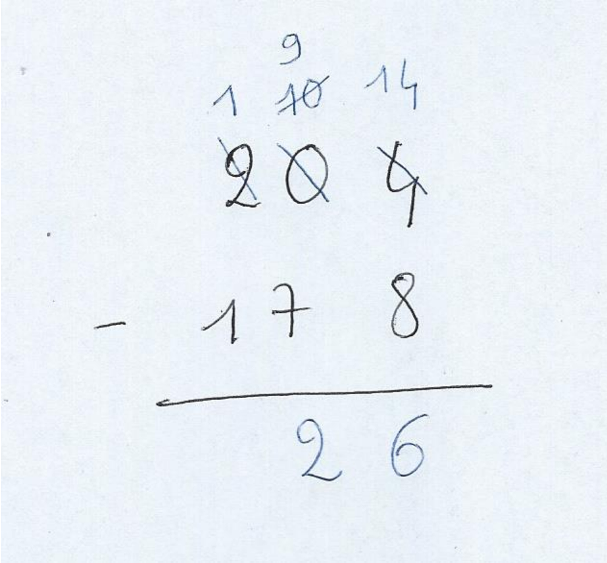
2. Comment vais-je m’y prendre pour effectuer l’opération (ou les opérations) que j’ai à faire?

3. Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

4. A quel point le modèle mathématique que j’utilise est-il adapté au problème que j’ai à traiter?

Calcul posé vs calcul mental pour $204 - 178 = ?$

Calcul posé



Calcul mental

“204 – 100 = 104
104 – 70 = 34
34 – 8 = 26”

ou

“200 – 178 = 22
22 + 4 = 26”

ou

…

Calcul posé vs calcul mental

Calcul posé

- Repose sur des *algorithmes*
- Opère sur les *chiffres*
- Va “*de droite à gauche*”

Calcul mental

- A un fondement *heuristique*
- Opère sur les *nombres*
- Va “*de gauche à droite*”

Torbeyns & Verschaffel (2015)

- Les élèves de fin d’école élémentaire …
  - préfèrent effectuer des soustractions sur des nombres à plusieurs chiffres en posant l’opération plutôt qu’en faisant un calcul mental
  - sont plus efficaces en posant l’opération
  - même sur des opérations qui se prêtent de façon optimale à du calcul mental (ex 204 – 178 = . ou 475 - 399 = .)
  - sont incapables de percevoir et d'exploiter les avantages que peut procurer le traitement d’une tâche de calcul au moyen d’une procédure mentale « habile »

Calcul mental par des procédures mentales « habiles»

$204 - 178 = ?$

$200 - 178 = 22$

$22 \underline{+ 4} = 26$

$475 - 399 = ?$

$475 - 400 = 75$

$75 \underline{+ 1} = 76$

Quatre choix pour le (jeune) mathématicien

1. Quelle(s) opération(s) ai-je à effectuer?

2. Comment vais-je m'y prendre pour effectuer l'opération (ou les opérations) que j'ai à faire?

3. Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

4. A quel point le modèle mathématique que j'utilise est-il adapté au problème que j'ai à traiter?

Q3: Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

- Le calcul mental doit-il être enseigné en vue d'une bonne maîtrise d'une unique stratégie de calcul ("expertise routinière") ?

- Ou doit-il stimuler et aider les élèves à mobiliser de façon pertinente une variété de stratégies de calcul mental ("expertise adaptative") ?

- Si oui, quand, pour quoi et comment enseigner pour parvenir à cette "expertise adaptative"?

Quelle stratégie spécifique de calcul mental vais-je choisir pour : 204 – 178 = .

- *Soustraction directe*: on soustrait 178 à 204
  - "204 – 100 = 104, 104 – 70 = 34, 34 – 8 = 26"

- *Addition indirecte* : on additionne pour aller de 178 à 204
  - "178 *+* <u>*2*</u> *+* <u>*20*</u> *+* <u>*4*</u> = 204, la réponse est donc 26"

Quelle stratégie spécifique de calcul mental vais-je choisir pour : 204 – 178 = .

- *Soustraction directe*: on soustrait 178 à 204
  - “204 – 100 = 104, 104 – 70 = 34, 34 – 8 = 26”

- *Addition indirecte* : on additionne pour aller de 178 à 204
  - “178 + <u>*2*</u> + <u>*20*</u> + <u>*4*</u> = 204, la réponse est donc 26”

Signification “retrait”

Signification “écart”

Choisir de façon adaptée entre soustraction directe et addition indirecte

- 204 – 6 = ?
  - soustraction directe

- 204 – 198 = ?
  - addition indirecte

- 204 – 108 = ?
  - Pas de stratégie privilégiée évidente

Torbeyns, Peters & Verschaffel (2015)

Les élèves de fin d’école primaire (qui sont plutôt formés à mettre en oeuvre de façon routinière la soustraction directe)…

- effectuent des soustractions plus rapidement et mieux (résultats justes) avec l’addition indirect qu’avec la soustraction directe …
- spécialement quand la différence entre les deux nombres donnés est petite (ex 804 – 796 = ?)…
- mais aussi, dans une certaine mesure, quand la différence est grande (ex 804 – 76 = ?)

Quatre choix pour le (jeune) mathématicien

1. Quelle(s) opération(s) ai-je à effectuer?

2. Comment vais-je m'y prendre pour effectuer l'opération (ou les opérations) que j'ai à faire?

3. Quelle stratégie spécifique de calcul (mental) vais-je appliquer?

4. A quel point le modèle mathématique que j'utilise est-il adapté au problème que j'ai à traiter?

Q4: A quel point le modèle mathématique que j'utilise est-il adapté au problème que j'ai à traiter?

- "Quand les experts utilisent les mathématiques pour résoudre un problème du monde réel ("modélisation mathématique") ils construisent et travaillent sur un "modèle mathématique" qui ne rend pas compte parfaitement ou complètement de la situation, mais qui inclut une espèce de simplification (délibérée) fondée sur une hypothèse (raisonnable)"

(suite)

- Il est important que, dès l'école primaire, les enfants apprennent à faire cette simplification "en toute conscience, en explicitant en quoi ces hypothèses sont simplificatrices, et en sachant que la simplification introduit un degré d'imprécision par rapport aux objectifs de l'exercice“ (Verschaffel et al., 2000, p. 167)

Verschaffel et al. (1994)

- *Problème*: “Un homme veut tendre une corde entre deux piquets éloignés de 12 mètres l’un de l’autre, mais il n’a que des morceaux de corde de 1,5 mètres de long. De combien de morceaux a-t-il besoin? “
- *Réponse la plus fréquente*: “12 : 1,5 = 8”

- *Réponses concrètes plus rares* (par ex, “9 ou 10, ou même plus, car il aura besoin de davantage de corde pour attacher les morceaux l’un à l’autre et aux deux piquets.”)

Conclusion

- Il est essentiel que les auteurs de manuels scolaires et les enseignants enrichissent l'ensemble de problèmes qu'ils proposent aux élèves par des vraies tâches de modélisation qui invitent, et même obligent les enfants à utiliser à la fois leurs connaissances mathématiques et celles du monde réel, afin de leur permettre de résoudre des problèmes concrets en leur donnant du sens.

ENS DE LYON

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Lieven Verschaffel

Université catholique de Louvain, Belgique