

NOMBRES ET OPÉRATIONS :
PREMIERS APPRENTISSAGES

Lycée Buffon, Paris XV
12-13 novembre 2015

Influence des connaissances quotidiennes, du phénomène de congruence et apport du recodage sémantique

Emmanuel Sander

Jean-François Richard

Laboratoire Paragraphe - Equipe CRAC, Université Paris 8

sander@univ-paris8.fr

RDP : Lien entre les propriétés mathématiques et les propriétés sémantiques issues de l'environnement

La résolution de problèmes joue un rôle primordial **non pas seulement dans la mise en œuvre mais dans la construction** même des notions mathématiques sous jacentes à l'usage des opérations. Elle est le support pour (i) Guider l'élève dans **l'analyse des relations sémantiques de l'énoncé** pour lui montrer comment cette analyse conduit au choix d'une opération ; (ii) Orienter l'élève vers **le recodage sémantique et l'élaboration de catégories sémantiques génériques.**

La perception que l'on a des situations et des opérations qu'on leur applique est biaisée par des propriétés non pertinentes mais saillantes, pouvant faire obstacle à l'acquisition du sens de l'opération. Pour cette raison, dans l'apprentissage des opérations il est essentiel (i) Que les élèves intègrent l'idée qu'**un même contenu peut être lu de plusieurs façons (possibilité de recodage)** ; (ii) D'introduire les opérations par **des situations mettant en scène les propriétés pertinentes sur le plan mathématique** et dépourvues de propriétés non pertinentes saillantes, qui biaisent le sens de l'opération.

Analogie naïve de la soustraction : le retrait

- “Inventer un problème de soustraction dont la solution est $8-3=5$ ”
- Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc...) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc...). Il/Elle en donne (mange, perd, etc...) 3 à (pendant, etc...). **COMBIEN LUI EN RESTE-T-IL ?**

Analogie naïve de la soustraction : le retrait

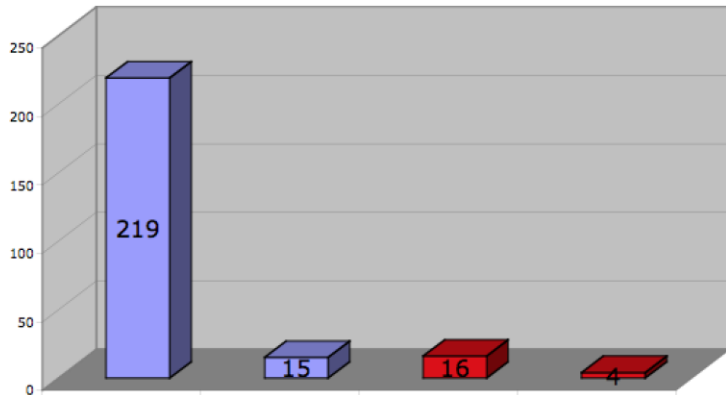
- “Inventer un problème de soustraction dont la solution est $8-3=5$ ”
- Paul (Hugo, Théo, Nathan, Léa, Marie, Judith, etc...) a 8 bonbons (billes, gâteaux, pommes, etc...). Il/Elle en donne (mange, perd, etc...) 3 à (pendant, etc...). **COMBIEN LUI EN RESTE-T-IL ?**
- Soustraire c'est perdre, retirer, enlever (une totalité dont une partie est retranchée. La question porte sur la partie subsistante)

Analogie naïve de la multiplication : la réplication

- Si on demande d'inventer un problème de multiplication, presque tout le monde introduit un nombre entier
- Difficulté à inventer un énoncé de problème dans lequel multiplier rend plus petit
 - Si un gallon d'essence coûte £1,27, combien coûte 0,22 gallon ? (Majorité d'erreurs alors que si on remplace 0,22 par 5, 100% de réussite ; Bell, Swann & Taylor, 1981)
- Prix de 3 objets à 50 cruzeiros ? vs 50 objets à 3 cruzeiros ? (75% vs. 0%)
- Pourquoi $3 \times 5 = 5 \times 3$, c'est-à-dire $5 + 5 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$?
- Définition consensuelle de ce qu'est une multiplication :« Une multiplication est une addition réitérée d'un nombre, un nombre de fois donnée »« Multiplier, c'est additionner un certain nombre à lui-même autant de fois que le nombre par lequel on le multiplie l'indique »

Analogie naïve de la division : le partage

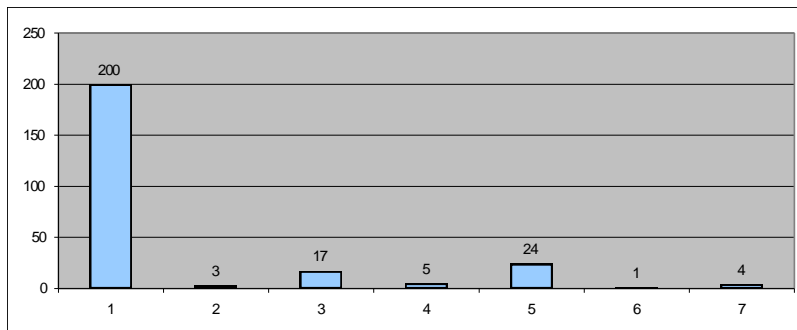
“Inventer un problème de division”



- 1: Partage
- 2: Quotition
- 3: Problème inapproprié
- 4: Non réponse

Audo & Sander, 2008 ; Sander, 2008

“Inventer un problème de division (une et une seule division) dont le *résultat* soit plus grand que la *valeur initiale*”

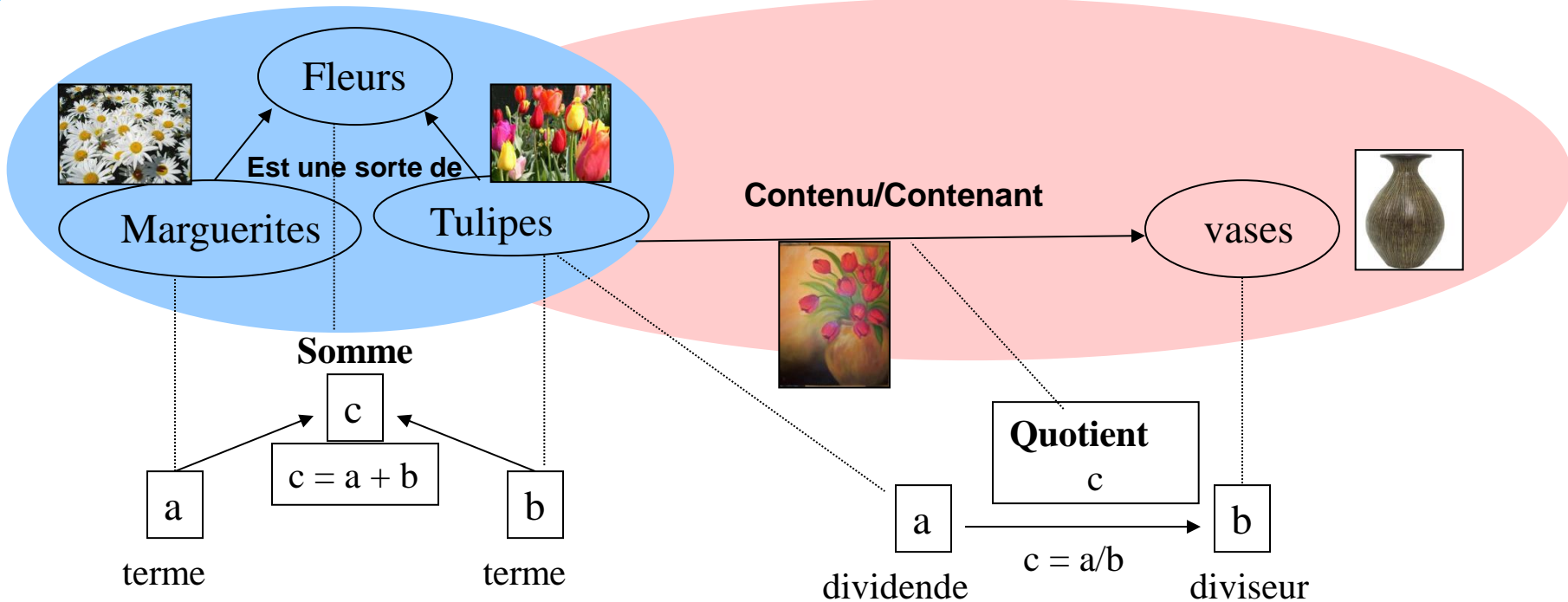


- 1: « Impossible ! »
- 2: Possible, mais pas de problème proposé
- 3: Possible, mais valeurs numériques uniquement
- 4: Possible, mais justification erronée
- 5: Invente un problème inapproprié
- 6: Réussite
- 7: Pas de réponse

Une seule réussite sur 254 élèves !

- « Impossible, car diviser c’est découper en plusieurs morceaux ; pour avoir plus, il faut multiplier »
- « Lorsqu’on divise par une moitié, on a plus, mais c’est impossible de diviser par une moitié »

Congruence sémantique (entre opération et situation)



Dans les manuels, pour 97% des problèmes à résoudre par addition, les objets additionnés appartenaient à des catégories de même niveau (e.g., des pommes et des poires, ou des billes rouges et noires) alors que 94% des problèmes demandant une division utilisaient des objets reliés fonctionnellement (e.g., des billes et des boites). Bassok, Chase & Martin, 1998

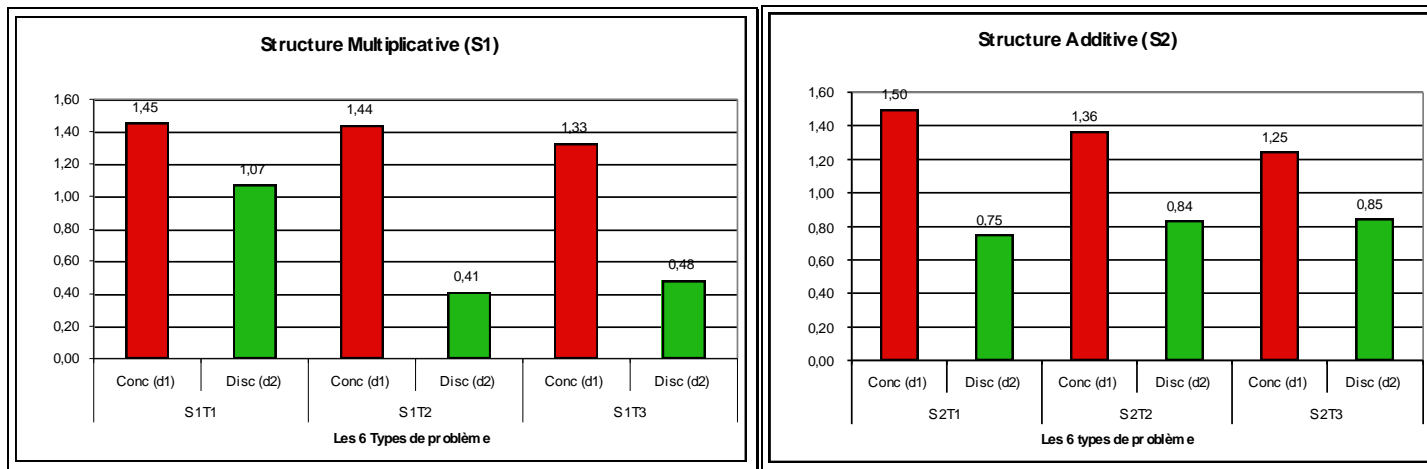
Congruence procédurale (efficacité simulation mentale)

- 1/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 4/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?

Brissiaud & Sander, 2010

Congruence procédurale (efficacité simulation mentale)

- 1/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (16/20)
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? (8/20)
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (8/20)
- 4/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? (14/20)



Brissiaud & Sander, 2010

Recodage sémantique

Le recodage sémantique fait apparaître la ressemblance profonde entre deux problèmes qui sont isomorphes en dépit des différences sémantiques.

Ex : dans le problème « *Pierre avait des billes, il en a donné 4 et il lui en reste 3, combien en avait-il ?* » recoder les 4 billes données et les 3 restantes comme des parties, (elles font partie des billes possédées au début) fait apparaître que c'est un problème de somme, tout comme la réunion de deux parties.

Il consiste à attribuer à une situation des propriétés usuellement attribuées à une autre

Il permet de faire abstraction des différences entre situations et d'accéder à une conception plus abstraite.

Tableau 6.1 - Types de problèmes et proportions de réussite en fonction du niveau scolaire (d'après Riley, Greeno et Heller, ibid.).

TYPES DE PROBLEME

TAUX DE REUSSITE

Changement

	Mat.	CP	CE1	CE2
1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?	.87	1.00	1.00	1.00
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?	1.00	1.00	1.00	1.00
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?	.61	.56	1.00	1.00
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?	.91	.78	1.00	1.00
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?	.09	.28	.80	.95
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?	.22	.39	.70	.80
Combinaison				
7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?	1.00	1.00	1.00	1.00
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?	.22	.39	.70	1.00
Comparaison				
9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?	.17	.28	.85	1.00
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?	.04	.22	.75	1.00
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?	.13	.17	.80	1.00
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?	.17	.28	.90	.95
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?	.17	.11	.65	.75
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien de billes a Y?	.00	.06	.35	.75
Egalisation				
15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y

Paul a 8 billes. Il en perd 3 pendant la récréation. Combien lui en reste-t-il ?

Paul a 3 billes de moins que Mathieu. Mathieu a 8 billes. Combien de billes Paul a-t-il ?

Paul a 8 billes. Il en perd pendant la récréation. Il lui en reste 3. Combien de billes Paul a-t-il perdu ?

Paul avait des billes en allant à l'école. Il en gagne 3 pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes Paul avait-il avant la récréation ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien de billes manque-t-il à Paul pour qu'il en ait autant que Mathieu ?

Paul a 3 billes. Mathieu a 8 billes. Combien Mathieu a-t-il de billes de plus que Paul ?

Paul a 3 billes. Il en gagne pendant la récréation et maintenant il en a 8. Combien de billes a-t-il gagnées ?

Riley, Greeno, Heller, 1983

Recodage sémantique

Madame Durand a 30 images. Elle partage ces images entre 3 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien d'images chaque enfant va-t-il recevoir ?

Induit une structure de partage et la procédure $10+10+10=30$

Monsieur Dupont a 30 gâteaux. Il partage ces gâteaux entre 10 enfants pour que chacun ait la même chose. Combien de gâteaux chaque enfant va-t-il recevoir ?

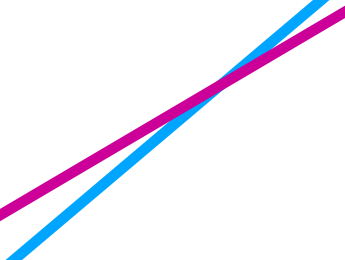
Même structure de partage mais la procédure associée $3+3+\dots\dots+3 = 30$

Le recodage de la division partage en division quotient permet la procédure $10+10+10=30$

Si je distribue 30 gâteaux entre 10 enfants, il me faut 10 gâteaux pour faire un tour de distribution

$10+10+10=30$, je ferai 3 tours donc chacun aura 3 gâteaux

Brissiaud et al., 2010



Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros.
Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins
que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros.
Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins
que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

$15 - 7 = 8$ (classeur) ; $15 - 3 = 12$ (Laurent) ; $12 - 8 = 4$ (équerre)
L'équerre coûte 4 euros

Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros.
Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins
que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

$15 - 7 = 8$ (classeur) ; $15 - 3 = 12$ (Laurent) ; $12 - 8 = 4$ (équerre)
L'équerre coûte 4 euros

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est
arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que
Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps
Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros.
Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins
que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

$15 - 7 = 8$ (classeur) ; $15 - 3 = 12$ (Laurent) ; $12 - 8 = 4$ (équerre)
L'équerre coûte 4 euros

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est
arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que
Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps
Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

$15 - 7 = 8$ (début) ; $15 - 3 = 12$ (arrêt Laurence) ; $12 - 8 = 4$ (durée)

Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans

Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. Il paie 15 euros.
Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins
que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

$15 - 7 = 8$ (classeur) ; $15 - 3 = 12$ (Laurent) ; $12 - 8 = 4$ (équerre)

MAIS AUSSI $7 - 3 = 4$

L'équerre coûte 4 euros

Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans et s'est
arrêtée à 15 ans. Jeanne a commencé au même âge que
Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps
Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

$15 - 7 = 8$ (début) ; $15 - 3 = 12$ (arrêt Laurence) ; $12 - 8 = 4$ (durée)

MAIS AUSSI $7 - 3 = 4$

Jeanne a suivi ses cours de danse pendant 4 ans

Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014

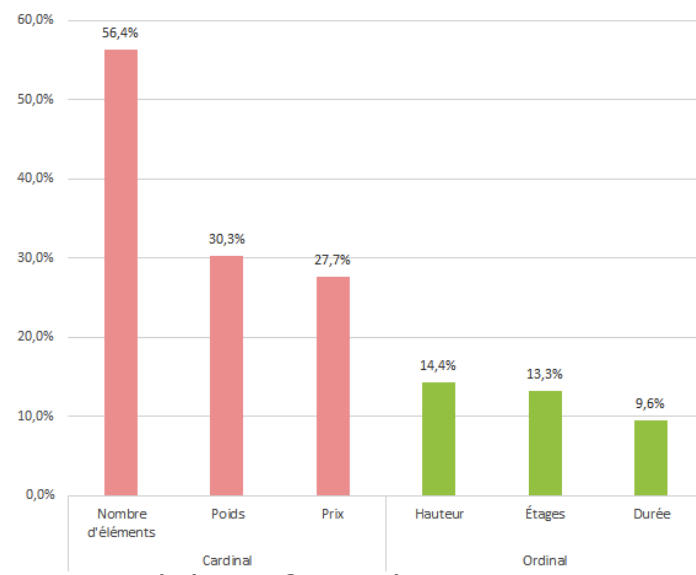
Les différences entre problèmes de comparaison et problème de parties-tout sont superficielles, puisque ce sont des différences de lecture de la situation.

Ce recodage est difficile, car il est fait spontanément par une minorité d'adultes.

Laurent achète une trousse à 7 euros et un classeur. ~~[Il paie 15 euros]~~. Jean achète un classeur et une équerre. Il paie 3 euros de moins que Laurent. Combien coûte l'équerre ?

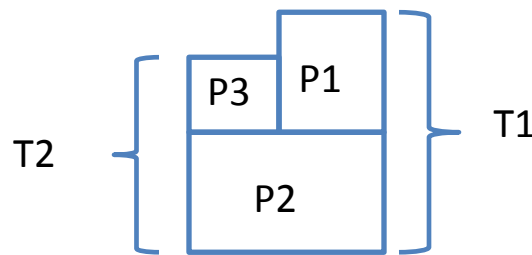
Laurence a suivi des cours de danse pendant 7 ans ~~[et s'est arrêtée à 15 ans]~~. Jeanne a commencé au même âge que Laurence et s'est arrêtée 3 ans plus tôt. Combien de temps Jeanne a-t-elle suivi ses cours de danse ?

	1 calcul	3 calculs
Achat	5%	95%
Cours	70%	30%

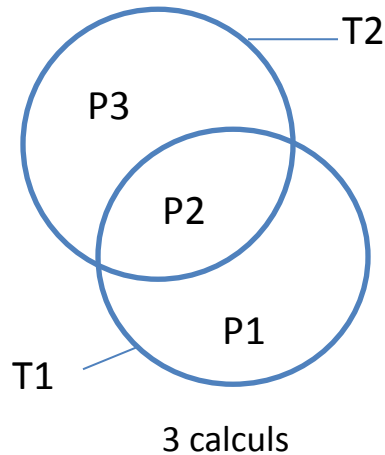


Gamo, Taabane & Sander, 2011 ; Gamo, Nogry, Sander, 2014; Gros, Thibaut & Sander, 2015

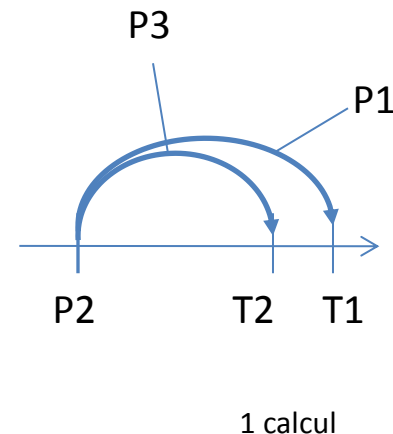
Structure profonde



Structure induisant un schéma partie-tout
Inférence de complément

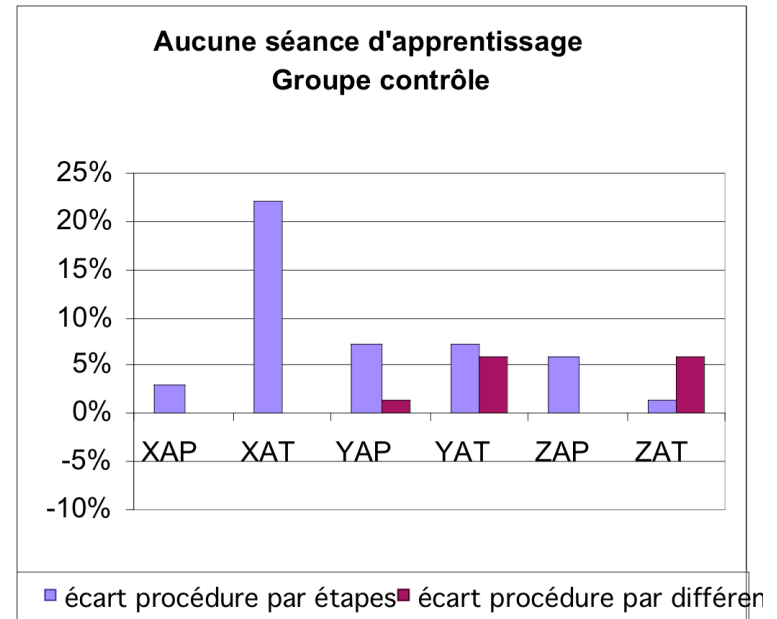
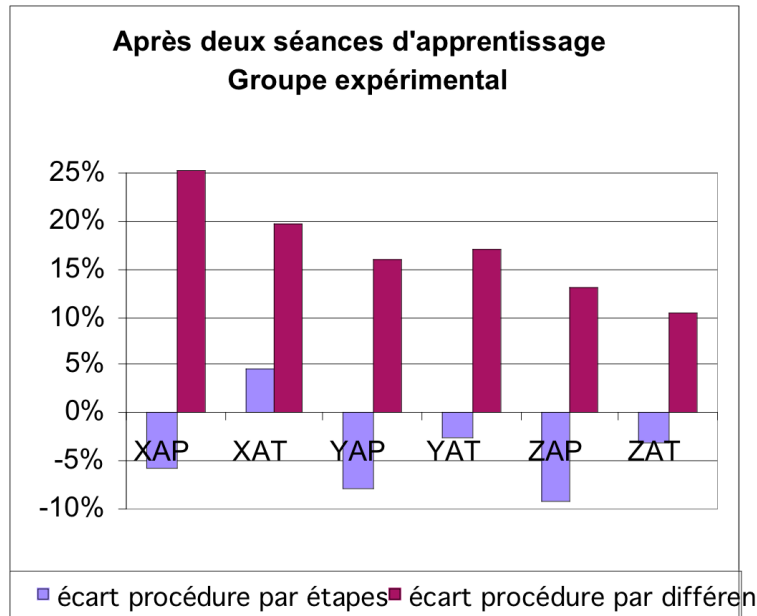


Structure induisant un schéma de comparaison
Inférence de comparaison



Le recodage d'un problème lu comme un problème de parties-tout en un problème de comparaison est fait par le moyen de l'inférence : *comme la partie P2 est commune aux deux tous la différence entre les tous T1 et T2 est la même que la différence entre les parties P1 et P3*, comme le montre le schéma.

Apprentissage du recodage sémantique



- Le recodage fait apparaître les ressemblances profondes entre ces problèmes, qui mettent en scène des calculs de différences dans des contextes sémantiques incitant soit à une lecture soit en termes de relations parties-tout soit de comparaison
- Les élèves de CM1 /CM2 sont capables d'apprendre à faire un recodage d'un haut degré d'abstraction

Développer la flexibilité représentationnelle

Lors d'une course, 108 coureurs prennent le départ. Il y a beaucoup d'abandons : 85 coureurs seulement terminent la course. Combien de coureurs ont abandonné ?

25% de réussites en début de CE2 ; DEPP 2014

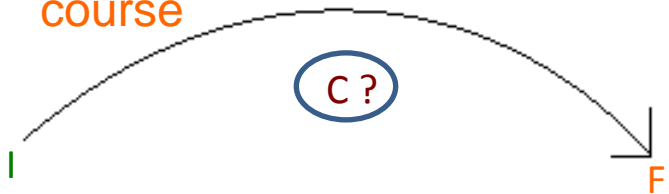
Soustraire 85 de 108 est difficile car 85 est le nombre de coureurs qui restent. Il faut amener à concevoir que le nombre d'abandons est la partie manquante.

Codage (spontané) transformation

Etat initial : Les 108 coureurs

Transformation : Les coureurs qui abandonnent

Etat final : Les 85 coureurs qui terminent la course

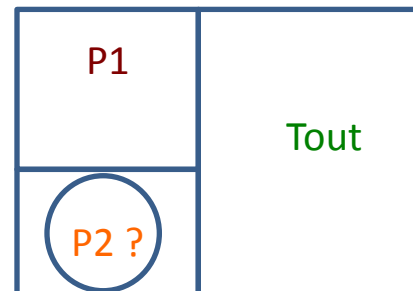


Recodage combinaison

Partie 1 : Les 85 coureurs qui terminent la course

Partie 2 : Les coureurs qui abandonnent

Tout : Les 108 coureurs



Développer la flexibilité représentationnelle

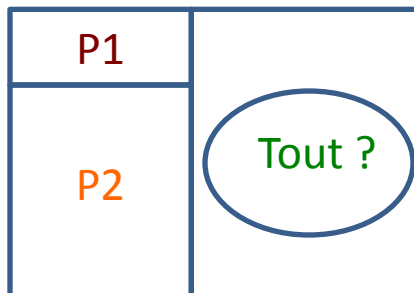
Pierre va à l'école avec des billes bleues et des billes rouges. A la récréation, il perd ses 39 billes rouges. Maintenant il lui reste ses 4 billes bleues. Combien de billes Pierre avait-il avant la récréation?

- Codage combinaison

Partie 1: 39 billes rouges perdues

Part 2: 4 billes bleues restantes

Tout : Les billes de Pierre avant la récréation

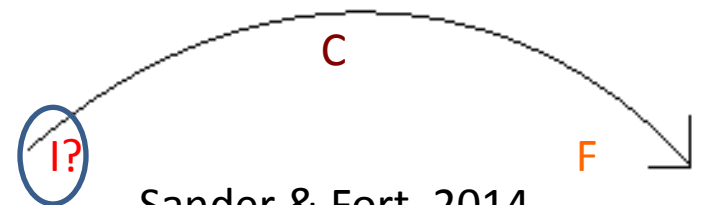


- Codage transformation

Etat initial : Les billes de Pierre avant la récréation

Transformation : 39 billes (rouge)

Etat final : 4 billes (bleues)



Sander & Fort, 2014

Développer la flexibilité représentationnelle

	Contrôle (C) (N=115)	Experimental (E) (N=111)
CE1 (N=78) MOY (7A 6M)	39	39
CE2 (N=148) MOY (8A 7M)	76	72
<u>Prétest</u>	Problèmes de complément Problèmes de transformation	
Apprentissage	Problèmes « Classiques »	Problèmes « Flexibles »
<u>Posttest</u>	Problèmes de complément Problèmes de transformation	

CE2

GE : 69.31% to 80.97% : $F(1,142)=12.49, p<0.001$

GC : 72.24% to 73.29% : $F(1,150)=0.16, p=0.687$

CE1

GE : 50.00% to 63.14% : $F(1,76)=4.48, p<0.038$

GC : 52.88% to 51.28% : $F(1,76)=0.059, p=0.808$

Sander &
Fort, 2014

Introduire les opérations

On a le choix d'un grand nombre de situations pour introduire les opérations, par exemple pour l'addition et la soustraction

La réunion de deux parties dans un tout

La transformation d'une quantité par ajout ou perte

La comparaison de deux quantités

Selon l'opération à introduire, ces situations ne sont pas également favorable

Cette approche est développée dans la progression ACE (confère présentation de Gérard Sensevy)

Introduire les opérations

Commutativité de l'addition : réunion de parties favorable

J'ai 2 pommes et 7 oranges, combien ai-je de fruits en tout ?

les parties étant symétriques, on pose les pommes puis les oranges ensuite ou l'inverse, le tout est inchangé

Comparaison défavorable, car les parties sont dissymétriques

Jacques a 2 billes, Pierre en a 7 de plus, combien Pierre a-t-il de billes

On peut poser les 2 billes de Jacques d'abord et les 7 billes de la différence ensuite, mais l'inverse est inconcevable, car 7 est un terme comparatif dont le référent doit être présent

Introduire les opérations

- Pour introduire la soustraction la comparaison est favorable
- *Jacques a 5 billes, Pierre en a 8, combien Pierre en a-t-il de plus que Jacques ?*
- L'équivalence entre la forme additive et soustractive est saillante
- *Si Pierre a 3 billes de plus que Jacques, Jacques en a 3 de moins*
- Le choix de la situation de transformation est défavorable
- La soustraction est associée à une perte et il devient difficile de concevoir que la valeur du gain (*J. a 5 billes il en reçoit d'autres, après il en a 8 → addition à trou $5+3=8$*) est une différence de même nature que la valeur du reste après perte (*P. a 8 billes, il en donne 5, combien lui en reste-t-il ? → soustraction $8-5=3$*)

Introduire les opérations

- La **soustraction** à partir de situations de **comparaison**, qui illustre la notion de différence au niveau le plus général

- Poursuivre avec les situations de parties-tout en **généralisant l'équivalence entre forme additive** (ajouter la partie manquante) **et soustractive** (enlever la partie connue)

- Construire à partir des situations parties-tout **les catégories génériques de *partie connue, partie manquante, quantité totale***

- Enfin les **situations de transformations** ajout et perte en faisant un **recodage sémantique** à l'aide des catégories génériques



Emmanuel Sander Jean-François Richard

Laboratoire Paragraphe - Equipe CRAC, Université Paris 8
sander@univ-paris8.fr