

ENTRÉE DANS L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR : ÉCLAIRAGES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Ghislaine Gueudet

CREAD, Université de Brest

Fabrice Vandebrouck

LDAR, Université Paris Diderot

Juillet 2019



 **cnesco**
conseil national
d'évaluation
du système scolaire

Ce document s'inscrit dans une série de contributions publiées par le Conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) sur la thématique : **Post-baccalauréat**.

Les opinions et arguments exprimés n'engagent que les auteurs de la contribution.

Pour citer cet article :

Gueudet, G. & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur : Éclairages en didactique des mathématiques*. Cnesco.

Disponible sur le site du Cnesco : <http://www.cnesco.fr>

Publié en juillet 2019

Conseil national d'évaluation du système scolaire

Carré Suffren - 31-35 rue de la Fédération 75015 Paris

Table des matières

I. À propos des difficultés rencontrées par les étudiants débutants et de leurs causes	5
A. Des contenus abstraits, avec du formalisme, soulevant des difficultés de conceptualisation	5
1. Advanced mathematical thinking (Pensée mathématique avancée)	5
2. Statut des notions à enseigner	6
B. Des attentes se référant aux pratiques mathématiques des mathématiciens	7
3. Langage, signes et symboles mathématiques	9
C. Une différence de cultures institutionnelles entre secondaire et supérieur	10
1. Un changement de contrat didactique	10
2. Des programmes et des pratiques pilotés par des exigences institutionnelles différentes ..	11
3. Les difficultés spécifiques dans le cas des non-spécialistes	12
D. Les enseignants de l'université, attentes et pratiques	13
1. Une surestimation par les enseignants du supérieur des connaissances disponibles des étudiants	13
2. Pratiques d'enseignement en mathématiques dans le supérieur	17
E. Pratiques des étudiants dans l'enseignement supérieur	19
II. À propos des dispositifs visant à surmonter ces difficultés	22
A. Faire découvrir l'université aux élèves de lycée	22
1. Les stages Hippocampe ou les stages MathC2+	22
2. Filles et maths, une équation lumineuse	22
B. Dispositifs d'aide aux étudiants	23
1. Exemple des support centers au Royaume-Uni	23
2. Opération Tremplin à Namur	24
3. Accompagnement des primo-entrants en France	24
C. Enseignements s'éloignant des pratiques habituelles	25
1. Ingénieries dédiées à des contenus ciblés	25
2. Impliquer activement les étudiants et donner du sens aux mathématiques	26
3. Apports possibles du numérique	27
4. Expérimentations à large échelle	31
5. Dispositif d'échanges entre enseignants	33
D. Formation des enseignants du supérieur	34

ANNEXE : Contenus mathématiques et transition secondaire-supérieur	36
A. L'analyse	36
1. Les nombres réels	36
2. Fonctions à la transition lycée-université	38
3. Les suites numériques	43
4. Le discret et le continu en analyse	44
B. L'algèbre linéaire.....	47
1. Comment l'histoire des mathématiques éclaire la difficulté de l'algèbre linéaire élémentaire.	47
2. Des pratiques se rapprochant de celles de mathématiciens : nécessité de flexibilité	48
3. Une différence de cultures institutionnelles.....	49
4. Quels dispositifs, pour l'enseignement de l'algèbre linéaire ?	50
C. La logique.....	51

Liste des figures

Figure 1. Extrait d'un exercice élémentaire sur les matrices.	9
Figure 2. Exemple de production d'étudiant de L1 sur un exercice de développements limités	15
Figure 3 . Définition des réels dans Maths Seconde, Nathan (2010) p. 8	37
Figure 4. Définition des réels dans le manuel Hyperbole Seconde (2009) p. 32	37
Figure 5. Définition des nombres réels, Math'x Terminale S (2012), Didier, p.471	38
Figure 6. Symbole Seconde, Belin, (2010), p. 74	40
Figure 7. Math'x Seconde, Didier, (2010), p. 62	40
Figure 8. Un travail technique sur les fonctions, Baccalauréat 2017.....	41
Figure 9. Un travail dans le registre graphique, Baccalauréat 2017.	42
Figure 10. Phare 3 ^e , Hachette, (2008), p. 133. La transition discret-continu non questionnée.....	45
Figure 11. Transmath TES, Nathan, (2012), p. 74 – On notera la notion de ligne « <i>continue et régulière</i> »	45
Figure 12. Productions d'élèves de 1 ^{re} S mettant en évidence les confusions suites-fonctions	46

Introduction

La recherche en « *Mathematics Education* » se penche sur le thème de l'entrée dans l'enseignement supérieur dans de nombreux pays. Nous présentons ici une synthèse de résultats identifiés par ces travaux internationaux. Cette synthèse inclut des travaux menés en France dans le champ de la didactique des mathématiques ; nous ne mentionnons pas en revanche des travaux français plus « pédagogiques », c'est-à-dire moins centrés sur les contenus de savoir.

Quelques remarques préliminaires nous semblent nécessaires :

- la plupart des travaux que nous considérons traitent de « transition secondaire-supérieur ». Les mathématiques étant enseignées dans le secondaire, beaucoup d'études sur l'entrée à l'université s'attachent à identifier les différences entre secondaire et supérieur ;
- il ne s'agit en aucun cas de dire que toute différence est nuisible, des changements -voire des ruptures - entre secondaire et supérieur sont nécessaires ;
- les conditions d'un pays à l'autre sont très variables, dans ce texte bref nous ne pouvons pas aborder ces spécificités nationales. La référence principale reste souvent celle des conditions et des pratiques en France.

Les recherches sur la transition secondaire-supérieur existent internationalement depuis de nombreuses années. En 1998, De Guzman, Hodgson, Robert et Villani produisent une première synthèse de travaux (présentée lors du colloque international des mathématiciens, ICM) intitulée "*Difficulties in the passage from secondary to tertiary education*". Cette synthèse fait le point sur environ 10 années de recherches internationales. Cependant le nombre de travaux a augmenté de manière déterminante surtout à partir des années 2000, en lien avec la massification de l'accès à l'enseignement supérieur. Cette massification entraîne mécaniquement une augmentation des constats de difficultés. Dans le monde anglo-saxon, plusieurs rapports publiés à la fin des années 1990 ou au début des années 2000 visent à attirer l'attention sur les prérequis insuffisants des étudiants entrant à l'université (voir par exemple le rapport intitulé *Measuring the mathematics problem*, publié au Royaume-Uni en 2000 par le Engineering Council). Selon Lawson et Croft (2018) pour le même test de mathématiques élémentaires posé à l'entrée à l'université de Coventry, les résultats obtenus en 1999 par les étudiants ayant obtenu la note B en mathématiques au *A-level* (examen de niveau baccalauréat, noté sur 8 lettres dont la meilleure est A) sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus en 1991 par les étudiants qui avaient la note F (6^e niveau, le moins bon niveau parmi ceux qui permettent tout de même de poursuivre à l'université).

L'insuffisance des prérequis n'est cependant pas l'unique raison expliquant les difficultés rencontrées par les étudiants débutants. Les recherches menées depuis 2000 l'ont largement montré : différents types de facteurs sont à l'origine de ces difficultés. La considération de l'un ou l'autre type va également amener la proposition de différents types de dispositifs pour remédier à ces difficultés (Artigue, 2004 ; Gueudet, 2008 ; Thomas *et al.*, 2012 ; Gueudet & Thomas, 2018).

Dans cette synthèse nous rendons compte dans une première partie de travaux qui se sont attachés à l'analyse des causes des difficultés. Cette partie est donc structurée en fonction des différents types de causes retenus. Dans une seconde partie, nous présentons différents types de dispositifs qui ont été proposés et testés dans l'objectif de remédier à ces difficultés. Dans ces deux parties nous n'entrons pas dans le détail de contenus mathématiques ; nous présentons en annexe des exemples de travaux centrés sur de tels contenus.

I. À propos des difficultés rencontrées par les étudiants débutants et de leurs causes

A. Des contenus abstraits, avec du formalisme, soulevant des difficultés de conceptualisation

Un premier type de cause identifié par de nombreux chercheurs au niveau international, pour les difficultés rencontrées par les étudiants débutant à l'université, peut se formuler de manière très simple : les étudiants ont des difficultés parce les contenus enseignés à l'université sont plus difficiles que ceux du secondaire. Il s'agit évidemment de dépasser ce constat, en approfondissant ce que signifie « difficile » dans ce contexte (en effet le constat d'accroissement de la difficulté peut être fait chaque année, et ne correspond pas forcément à une rupture).

Les auteurs qui ont travaillé à l'analyse de ces difficultés nouvelles ont pointé des changements très sensibles dans le degré d'abstraction des concepts enseignés et des tâches proposées. Par exemple, à l'université les étudiants vont travailler sur des ensembles d'objets, et sur la structure de ces ensembles, plutôt que sur les objets eux-mêmes. Ainsi, alors même que la notion de fonction est délicate (voir exemple « fonctions » en annexe), à l'université on considère des ensembles de fonctions, ce qui exige clairement une montée en abstraction.

Les travaux adoptant ce type de perspective s'appuient le plus souvent d'une part sur des analyses épistémologiques et historiques ; d'autre part sur une approche plus cognitive, qui s'intéresse aux processus de conceptualisation des étudiants. Nous donnons ci-dessous l'exemple de deux ensembles de travaux qui ont eu et ont encore une grande importance dans ce champ.

1. Advanced mathematical thinking (Pensée mathématique avancée)

Tall caractérise ainsi la pensée mathématique avancée : « *Le passage de la pensée mathématique élémentaire à la pensée mathématique avancée implique une transition significative : celle de décrire à définir, de convaincre à prouver. C'est la transition de la cohérence des mathématiques élémentaires à la conséquence des mathématiques avancées.* » (Tall, 1991)

Le fait que cette transition ait été associée dans de nombreux travaux anglo-saxons à la transition secondaire-supérieur est sans doute lié à une place attribuée à la démonstration très différente de celle prévue par les programmes français. En effet en France, l'initiation à la démonstration est placée très tôt au secondaire, et progressivement approfondie. Aux États-Unis, les étudiants découvrent à l'université ce qu'est une preuve formelle, et les exigences de rigueur qui y sont associées. Au secondaire, ils ont encore le droit de « convaincre ».

Cependant les travaux parlant de « Pensée mathématique avancée » ne sont pas centrés sur la démonstration, mais plutôt sur les modes de construction des connaissances, les styles cognitifs, les modes de pensée des étudiants à la fin du secondaire ou au début du supérieur.

Ainsi Gray *et al.* (1999) distinguent deux modes de construction des connaissances : un mode élémentaire, dans lequel on part d'objets physiques ou de symboles pour construire les processus et les concepts ; et un mode avancé, dans lequel on part d'un ensemble de propriétés, qui vont être utilisées pour construire un objet et déduire d'autres propriétés de cet objet.

Sierpiska (2000) développe les notions de « pensée pratique » (« *practical thinking* ») et « pensée théorique » (« *theoretical thinking* »), inspirées des travaux de Vygotsky (1987). La pensée théorique a les caractéristiques suivantes : le raisonnement est basé sur des connections logiques et sémantiques entre concepts ; ces connections sont faites sur la base de relations structurelles, dues à des concepts plus généraux, et non sur la base d'associations empiriques, ou de références à des exemples particuliers. Elle observe chez les étudiants des difficultés qu'elle interprète comme des manifestations du mode de pensée pratique.

Est-ce que la transition secondaire-supérieur consiste à aller de la pensée pratique à la pensée théorique ? La situation est bien entendu plus complexe. En fait dans toute pensée mathématique, il y a des aspects théoriques, et des aspects pratiques. C'est le cas même pour les mathématiciens professionnels ; mais ceux-ci contrôlent les aspects pratiques de leur pensée en ayant recours à des aspects théoriques. En revanche, selon Sierpiska, le mode de pensée pratique n'est pas assez présent à l'université ; parallèlement, le mode de pensée théorique n'est pas travaillé suffisamment tôt dans le système éducatif.

D'autres chercheurs adoptant un point de vue cognitif proposent des modèles plus complexes, dans lesquels il ne s'agit plus de distinguer deux modes de pensée, mais d'identifier différents stades dans le processus de conceptualisation (voir encadré 1 ci-dessous). Dans ce cas les stades sont hiérarchisés, et les difficultés de certains étudiants pour une tâche donnée sont attribuées au fait qu'ils n'ont pas atteint le stade mobilisé par cette tâche.

Des stades dans la conceptualisation des notions mathématiques avancées ? La théorie APOS.

Aux États-Unis, Dubinsky (1991) et son équipe ont développé une théorie qui est nommée APOS : « Action-Processus-Objet-Schéma ». Cette théorie propose une description dynamique du mode de construction des connaissances en mathématiques avancées, basée sur une analyse fine du savoir mathématique, complétée par des observations d'étudiants. Selon les tenants de APOS, la conceptualisation au niveau mathématique « avancé » suit les stades nommés dans l'intitulé de cette théorie : les étudiants effectuent des actions ; ils voient ensuite se dessiner des processus. Ces processus une fois compris sont « encapsulés » comme des objets sur lesquels il sera alors possible d'agir. La compréhension d'ensemble correspond au stade du schéma, qui permet la coordination de plusieurs objets. L'équipe constituée autour de Dubinsky a réalisé un travail d'analyse épistémologique, d'analyse des difficultés des étudiants, mais également de proposition et d'évaluation d'enseignements expérimentaux, et même de conception d'un logiciel *ad hoc* pour accompagner ces enseignements (le logiciel ISETL). Nous revenons dans la partie II.2.2 sur ces enseignements expérimentaux (Weller *et al.*, 2003).

2. Statut des notions à enseigner

Robert (1998) introduit en didactique des mathématiques l'idée de *statut* des notions mathématiques à enseigner. Il s'agit, pour une notion donnée, de se demander comment celle-ci s'insère dans des connaissances déjà introduites, et quelle est sa fonction. Déterminer le statut d'une notion passe par des analyses de programmes, mais également par des analyses épistémologiques. Une notion sera particulièrement délicate si elle est difficile à relier aux notions déjà connues des élèves ou étudiants. Or cette difficulté à établir des liens peut être inévitable, selon certaines caractéristiques du développement historique des notions.

Ainsi certaines notions (voir l'exemple de l'algèbre linéaire en annexe) ont émergé dans l'histoire des mathématiques par des nécessités de généralisation de démarches ou raisonnements locaux ; ou d'unification de problématiques traitées séparément jusqu'alors. Ces nécessités de généralisation ou d'unification ne peuvent apparaître qu'à ceux qui connaissent les différents raisonnements locaux, les différentes problématiques. Cependant l'enseignement ne peut pas suivre le chemin de l'histoire, qui a demandé plusieurs siècles avant de passer à ces généralisations ou unifications. Ainsi lorsque de telles notions sont introduites aux étudiants, elles semblent inutilement abstraites. De plus elles s'accompagnent le plus souvent d'un nouveau formalisme. On parle alors de notions Formalisatrices, Unificatrices, Généralisatrices et Simplificatrices (FUGS) : celles-ci sont porteuses de ruptures inévitables dans la transition. Il est utile que les enseignants soient conscients de leur difficulté, et du fait que cette difficulté est intrinsèque et ne résulte pas d'éventuelles lacunes des étudiants.

B. Des attentes se référant aux pratiques mathématiques des mathématiciens

Cependant apprendre des mathématiques ne signifie pas seulement apprendre des concepts et des propriétés ; il s'agit pour les étudiants de développer des pratiques mathématiques propres, pour faire des exercices et résoudre des problèmes. Ainsi la différence entre secondaire et supérieur est aussi une différence de pratiques mathématiques.

A l'université, divers travaux ont montré que les pratiques attendues des étudiants à l'université faisaient référence aux pratiques des mathématiciens professionnels : « *...la simple considération des programmes permet de constater que les mathématiques enseignées à partir du lycée commencent à ressembler (et cela s'accroît au fur et à mesure de la scolarité) aux mathématiques « des experts » (mathématiciens professionnels), tant en ce qui concerne les savoirs que les pratiques attendues.* » (Robert 1998, p.141)

Robert fait de plus l'hypothèse que les pratiques des mathématiciens professionnels servent en partie de modèle aux enseignants de l'université ; ainsi les attentes des enseignants vont dépendre de ces pratiques. Notons que ces attentes des enseignants influencent le contenu des cours et les tâches proposées en travaux dirigés ; cependant, les sujets d'examens sont souvent maintenus à un niveau nettement plus élémentaire (Gueudet & Lebaud, 2008) pour diverses raisons. Ceci explique aussi que les comportements des étudiants ne correspondent pas toujours aux attentes des enseignants comme nous le verrons ci-dessous.

Résolution de problèmes, raisonnement et preuve

De nombreux travaux portent sur la résolution de problèmes en fin d'enseignement secondaire ou au début du supérieur. Ils relèvent notamment des difficultés d'étudiants résultant d'un certain manque « d'expérience mathématique », en termes de quantité, et de variété des types de tâches et des techniques rencontrées. Ainsi les étudiants manquent d'outillage pour la résolution de problèmes, en termes de connaissances mathématiques, de démarches heuristiques, de moyens de contrôle etc. La construction d'une « expérience mathématique » semblable à celle des mathématiciens nécessite la pratique de nombreux problèmes suffisamment variés (et donc un temps long).

Concernant les élèves de terminale scientifique, spécialité mathématiques en France, Battie (2003) étudie l'enseignement de l'arithmétique. Cet enseignement, récemment introduit au moment de son étude, vise à proposer des contenus et des démarches préparatoires à l'enseignement pratiqué à l'université. Battie montre toutefois que les tâches proposées aux élèves ne leur laissent que peu

d'autonomie dans le choix des raisonnements. Elle distingue deux dimensions du raisonnement en arithmétique : la dimension organisatrice d'une part (raisonnement par l'absurde, récurrence etc.), et la dimension opératoire (manipulations algébriques, théorème clés etc.) d'autre part. Elle montre qu'en dehors de certaines tâches routinières, l'autonomie laissée aux élèves est très limitée, surtout au niveau organisateur. En observant des élèves, elle remarque cependant qu'ils font preuve d'une créativité inattendue dans la dimension organisatrice pour certaines tâches. En revanche, pour les tâches problématiques, ils se replient sur des traitements opératoires connus. Et comme ils ne sont pas assez solides au niveau organisateur, ils ne peuvent pas contrôler leur travail. C'est, d'après Battie, ce qui sépare les élèves des experts : l'expert peut toujours rattraper un échec à un niveau en contrôlant à un autre niveau.

Lithner (2000) montre que les étudiants de première année d'université en Suède n'ont pas spontanément recours à des démarches heuristiques (faire une figure, reformuler etc.), mais surtout que leurs moyens de contrôle sont fondés sur leurs expériences passées (en référence à des exercices proches qui ont déjà été rencontrés), et non sur des propriétés mathématiques. Ils essaient toujours de se ramener aux procédures qu'ils connaissent, et qui sont des procédures algorithmiques. On retrouve ici des observations proches de celles de Battie : il semble que la première année d'université ne permette pas le développement souhaitable des modes de raisonnement.

Ces travaux montrent donc des réserves sur les aptitudes des élèves et des étudiants concernant le raisonnement en mathématiques, mais aussi sur l'enseignement. L'attente de pratiques se rapprochant de celles des experts n'est pas associée à un enseignement qui soutiendrait le développement de l'autonomie.

Les travaux concernant la preuve à la transition secondaire-supérieur, qui portent uniquement sur les étudiants de filières mathématiques, font des constats du même type. Comme nous l'avons dit ci-dessus, l'initiation à la démonstration qui est faite dans le secondaire peut varier beaucoup d'un pays à l'autre. La France propose plutôt un enseignement de la démonstration approfondi dès le secondaire. Cependant, certains chercheurs français (voir par exemple Balacheff, 2010) relèvent que les exigences en termes de démonstrations formelles sont plus importantes à l'université. Les étudiants du début de l'université ont de nombreuses difficultés à répondre à ces exigences, d'autant plus qu'il leur est plus souvent demandé de lire et de reproduire des démonstrations, plutôt que d'en élaborer eux-mêmes (Pedemonte, 2007). De plus, même la lecture des démonstrations est faite de manière très différente par les étudiants et par les mathématiciens (Inglis & Alcock, 2012; Mejía-Ramos & Weber, 2014). Des chercheurs ont montré que les mathématiciens lisent les preuves en s'attachant d'emblée à la compréhension des principales idées, de la structure et des techniques employées (Weber, 2015).

L'apprentissage de la preuve pratiquée dans les enseignements universitaires nécessite la réunion de plusieurs facteurs : être convaincu dans un premier lieu de l'utilité de la preuve. Une plaisanterie américaine (célèbre dans le milieu des mathématiciens américains) raconte l'histoire d'un professeur qui passe plus d'une demi-heure à faire la preuve d'un théorème ardu devant un amphithéâtre. A la fin de la preuve, les étudiants lui disent : « Vous n'aviez pas besoin de faire tout ça monsieur, on vous croyait depuis le départ ! ». Ainsi il peut être important de ménager pour les étudiants l'occasion de formuler des conjectures eux-mêmes, pour mettre en évidence l'intérêt de prouver ces conjectures

(Lockwood *et al.*, 2016) ou de les invalider en utilisant des contre-exemples (Stylianides & Stylianides, 2009). Un autre prérequis important et souvent manquant est la compréhension du rôle des définitions dans l'élaboration de preuves (Ouvrier-Buffet, 2011).

Durand-Guerrier et Arsac (2005) ont travaillé sur le lien entre preuve et logique mathématique, et ils ont montré toute la complexité du lien entre la logique formelle et la preuve dans différents domaines des mathématiques. Leurs travaux montrent que la preuve doit combiner des aspects syntaxiques et des aspects sémantiques, en particulier dans le contexte des mathématiques « avancées ». Travailler sur ces deux aspects et sur leur articulation peut être soutenu par un enseignement traitant spécifiquement des compétences de logique, et par un travail sur le langage mathématique. Nous abordons ce point ci-dessous.

3. Langage, signes et symboles mathématiques

La référence aux pratiques des mathématiciens experts amène à s'intéresser au langage utilisé par ces mathématiciens. Ce langage mathématique est différent de celui pratiqué dans le secondaire, et plusieurs auteurs utilisent pour décrire la transition du secondaire à l'université la métaphore de l'arrivée dans un nouveau pays. Il s'agit de découvrir les coutumes de ce pays, et bien évidemment sa langue. La langue écrite peut parfois utiliser des signes inconnus de l'étranger.ère nouvellement arrivé.e !

Les difficultés liées aux quantificateurs

La thèse de Chellougui (2004), qui porte sur les quantificateurs universel et existentiel, montre les difficultés engendrées par l'usage du quantificateur existentiel lorsque des raisonnements dits « AE » (pour tout...il existe) nécessitent de montrer l'existence d'un objet mathématique. Chellougui (2003) montre aussi que les enseignants ne sont pas toujours attentifs à leur propre emploi des quantificateurs : quelqu'un qui pratique couramment une langue peut faire des écarts de langage, mais s'il sert de modèle à la personne qui apprend c'est problématique !

Bardini & Pierce (2018) introduisent la notion de « culture symbolique » des élèves et étudiants (*symbolic literacy*) : celle-ci caractérise l'aisance de ceux-ci avec les symboles mathématiques. Il s'agit d'examiner l'habilité à lire les symboles, mais aussi à les manipuler, à les associer, les transformer etc. Ces auteurs montrent que la culture symbolique attendue à l'université diffère largement de celle développée au lycée (leur étude se place en Australie, mais est probablement valable pour bien d'autres pays). Par exemple, le même symbole peut avoir de multiples sens (voir figure 1 ci-dessous).

Figure 1. Extrait d'un exercice élémentaire sur les matrices.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-b & b \end{pmatrix} \right]$$

Dans l'égalité ci-dessus, le symbole – a trois sens différents. Il désigne d'abord une opération sur les matrices. Il est aussi employé pour noter l'opposé d'un nombre, et finalement pour une soustraction entre deux réels a et b . Proposant un test à des étudiants de première année en mathématiques, les auteurs montrent que ces sens multiples d'un même symbole entraînent de nombreuses difficultés. Selon eux, l'initiation à cet emploi flexible de symboles pourrait être un facteur déterminant d'amélioration de la transition secondaire-supérieur.

D'autres travaux se placent dans la perspective des similarités entre l'apprentissage des mathématiques à l'université et celui d'une langue étrangère. Ainsi Nardi & Iannone (2005) analysent des productions d'étudiants et montrent que ceux-ci tentent de reproduire le « *genre speech* » (type de discours) des mathématiques universitaires. Les étudiants s'attachent à utiliser des symboles, de type quantificateurs, et suppriment autant que possible tous les mots de la langue naturelle. Leur objectif est de produire des phrases qui « sonnent » comme des mathématiques universitaires, mêmes si celles-ci n'ont pas toujours de sens mathématique.

Cette attitude, qui semble *a priori* regrettable, peut aussi apparaître comme une phase nécessaire dans l'apprentissage du langage des mathématiques universitaires. Selon Berger (2004), les étudiants apprennent un nouveau signe mathématique (signe est employé ici avec un sens très large) comme on apprend un mot nouveau. L'étudiant teste l'emploi du nouveau signe, par analogie, par imitation, souvent de manière incorrecte, jusqu'à parvenir à l'usage reconnu par l'institution.

C. Une différence de cultures institutionnelles entre secondaire et supérieur

Il faut d'abord noter que les mathématiques sont une discipline bien identifiée dans le cursus de l'enseignement secondaire ainsi que dans le supérieur. Il y a donc une transition à gérer d'une institution à l'autre qu'il n'y a pas pour d'autres disciplines comme l'informatique – bien que cela risque de changer – ou la sociologie, la psychologie etc.

1. Un changement de contrat didactique

On appelle contrat didactique (Brousseau, 1998) un système d'attentes mutuelles (souvent implicites) des enseignants et des élèves ou étudiants qui façonnent leurs relations. Certains travaux ont montré que ce système d'attentes évoluait entre le secondaire et le supérieur (Pepin, 2014 ; Gueudet & Pepin, 2018). Les changements de contrat ont lieu à des niveaux généraux qui ne relèvent pas directement ou indirectement de la discipline elle-même : enseignements sous forme de cours magistral en amphithéâtre, autonomie attendue pour le travail personnel, enseignants multiples pour les mathématiques, et moins accessibles qu'au lycée etc. Ils ont également lieu à des niveaux plus précis, en lien avec les mathématiques ou certains contenus mathématiques.

On note par exemple pour un même contenu une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types d'exercices proposés aux étudiants : au lycée, les exercices mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiate. À l'université, les connaissances doivent être plus disponibles et mises en fonctionnement de façon plus complexe. L'activité de démonstration (avec un minimum de formalisation notamment) tend à se développer alors qu'elle n'est pas au cœur de l'activité au lycée. L'existence et/ou l'unicité d'objets travaillés se pose explicitement à l'université alors que, sauf dans des cas bien précis (le théorème des valeurs intermédiaire typiquement), ces questions ne sont pas investiguées. Les élèves peuvent avoir l'impression qu'on ne joue pas au même jeu entre les mathématiques du lycée et celles de l'université. Nous allons préciser ci-dessous comment on peut analyser les changements de contrat didactique en utilisant divers points de vue.

2. Des programmes et des pratiques pilotés par des exigences institutionnelles différentes

Les programmes de mathématiques du secondaire sont définis nationalement et en général, les enseignants du secondaire ne participent pas à leur écriture. Malgré les textes et les programmes d'accompagnement, ces enseignants peuvent n'avoir qu'une vision obscure des choix opérés – réintroduction de la logique dans les programmes de lycée par exemple, enjeu de tels ou tels aspects dont l'interprétation conditionne peut-être la préparation à l'enseignement supérieur... Au niveau du supérieur, les maquettes d'enseignement sont préparées par les équipes enseignantes et elles sont spécifiques de chacune des universités, dépendant des forces en présence, des équipes de recherche. On peut alors penser que les enseignants adhèrent mieux au projet global. Il peut cependant y avoir de grandes disparités d'une université à l'autre – absence de tel contenu à tel endroit très développé à tel autre, on peut penser par exemple aux probabilités et aux statistiques. La société mathématique de France (SMF) avait édicté, après l'autonomie des universités, un socle commun des enseignements de mathématiques pour la licence, pour pallier la disparition de cadres nationaux. La pertinence de ce socle a été beaucoup discutée¹, mais il n'y a pas eu à notre connaissance de recherche didactique à ce niveau.

Au niveau du lycée, les pratiques semblent par ailleurs plus ou moins pilotées par la préparation du baccalauréat (voir Jullien, Matheron et Schneider, 2003, pour une amorce d'analyse didactique du décalage entre le sujet de baccalauréat scientifique 2003 et les pratiques habituelles des enseignants en terminale S). Les enjeux pour cet examen sanctionnant la fin des études secondaires ne sont pas toujours corrélés aux attendus à l'entrée à l'université, avec des contenus peu repris à l'université (les statistiques par exemple sont présentes dans de nombreuses filières au lycée, mais peu dans les filières scientifiques à l'université, du moins en première année). Au contraire, il peut y avoir une absence de contenus au lycée qui pourraient servir de socle à l'université (la géométrie dans l'espace par exemple pour des filières de futurs ingénieurs, ou la géométrie pour préparer l'enseignement de l'algèbre linéaire, Gueudet-Chartier, 2000); ce qui peut engendrer des malentendus à la fois pour les étudiants et pour les enseignants de lycée.

En licence de mathématiques, les contenus restent pour leur part souvent pilotés par les exigences à l'agrégation de mathématiques, qui reste une référence pour les mathématiciens de ce qui doit être appris après 4 années. Ceci fait notamment que les enseignants du secondaire et les enseignants du supérieur ont en principe une même formation mathématique, effectuée dans le cadre de l'université, même si ce peut-être à partir de la L3 pour certains et dans le cadre d'un cursus de grande école fortement associé à l'université (ENS notamment) pour d'autres. Cette remarque devrait tendre à rapprocher les pratiques au lycée et à l'université du point de vue institutionnel. Il semble toutefois qu'elle soit trop minimaliste et qu'elle ne fournisse pas une condition suffisante de connaissance mutuelle des pratiques et de la réalité du terrain de la part des deux catégories d'enseignants. Les premiers reçoivent par exemple une formation à l'enseignement de la discipline tandis que les seconds n'en reçoivent que très marginalement, au mieux (Vandebrouck, Corriveau, Cherick, 2016).

¹ Voir par exemple <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/math-universite/>

L'approche anthropologique de la transition secondaire-supérieur

Des travaux sur la transition secondaire-supérieur ont également exploité l'approche anthropologique du didactique (Bosch, Fonseca & Gascon, 2004 ; Winsløw, 2008). L'approche anthropologique du didactique permet d'analyser les aspects institutionnels de la transition secondaire supérieur sous le filtre de niveaux de codétermination didactique de l'activité mathématique des étudiants (et des enseignants), partant du niveau le plus élémentaire lié au sujet en action et remontant jusqu'aux niveaux de l'école et de la société en passant par les niveaux intermédiaires du domaine mathématique en jeu, de la discipline des mathématiques et de la pédagogie générale. L'approche anthropologique considère que les institutions façonnent les savoirs sous forme de praxéologies (voir ci-dessous) qui se développent à chacun de ces niveaux (Gueudet, Bosch, A DiSessa, Kwon et Verschaffel, 2017). L'étude de la transition amène alors à comparer les praxéologies au secondaire et au supérieur et à relever des points communs et des différences. Par exemple, au niveau de la discipline, les mathématiques de l'université sont plus focalisées sur l'organisation théorique des contenus mathématiques, la présentation de preuves et de théorèmes, afin que les étudiants les remobilisent pour résoudre des problèmes. Dans le secondaire, les mathématiques sont plus focalisées sur la production de résultats et les aspects pratiques de l'activité mathématique, avec un rôle plus « décoratif » des axiomes, des définitions et des preuves. Au niveau de la pédagogie, on a un accroissement des aspects transmissifs de l'enseignement dans le supérieur alors que dans le secondaire les élèves peuvent encore avoir quelques participations actives dans les dispositifs d'enseignement (par certaines situations ouvertes sur lesquelles réfléchir par exemple).

Le concept de praxéologie

Une praxéologie se décrit par quatre composants : un type de tâches, des techniques pour accomplir ce type de tâches, un discours expliquant cette ou ces techniques et qui est dénommé technologie, et enfin la théorie qui justifie la technologie. Sous cet angle, les travaux ont alors pointé les différences importantes entre les praxéologies du secondaire et du supérieur. Les praxéologies de l'enseignement secondaire sont souvent incomplètes, dominées par le pôle « pratique » constitué des tâches et des techniques. Les praxéologies sont aussi relativement « ponctuelles », spécifiques d'un unique type de tâches et elles vivent souvent assez isolées les unes des autres, sans qu'un effort systématique ne soit fait pour les structurer à un niveau plus « local » ou « régional », c'est-à-dire au niveau de la technologie ou de la théorie. Les associations tâches-techniques apparaissent ainsi comme des associations rigides : à un type de tâche correspond une technique bien précise qui est routinisée. A l'opposé, les praxéologies universitaires sont centrées sur leur pôle théorique et envisagées d'abord à un niveau très général, souvent régional, avec la supposition implicite que les praxéologies ponctuelles et locales développées dans l'enseignement secondaire constituent un socle sur lequel ces praxéologies régionales peuvent prendre sens.

3. Les difficultés spécifiques dans le cas des non-spécialistes

Les mathématiques sont enseignées dans de nombreuses filières qui ne sont pas principalement dédiées aux mathématiques : en physique, en chimie, dans toutes les études d'ingénieurs, en biologie, en économie etc. Dans de très nombreux pays, un constat est fait de « besoins mathématiques » qui vont croissant dans de nombreuses disciplines (Martin-Deschamps, Le Tallec & Waldschmidt, 2002 ; *National Mathematics Advisory Panel*, 2008). Ces non-spécialistes sont

particulièrement sujets aux difficultés en mathématiques ; certains sont parfois très surpris de la quantité de mathématiques qu'ils doivent apprendre et de la difficulté des contenus. Plusieurs études montrent que la difficulté des mathématiques enseignées est citée par une majorité d'étudiants comme une raison pour l'abandon des études dans les filières d'ingénieurs (en Allemagne Heublein, 2014, au Danemark, Søggaard Larsen, 2013).

Les recherches sur les mathématiques enseignées aux non-spécialistes mettent en évidence un problème institutionnel particulier. Il ne s'agit pas de différences entre le secondaire et le supérieur, mais plutôt de différences entre les mathématiques présentes dans les cours d'autres disciplines (physique, chimie, biologie, etc.) et les mathématiques enseignées dans les cours étiquetés « mathématiques », et ce pour les mêmes étudiants. Comme on peut s'y attendre, les éléments théoriques vus dans les cours de mathématiques sont très peu réinvestis dans les cours des disciplines « utilisatrices » (voir par exemple, pour le cas de l'intégrale dans un cours de résistance des matériaux au Brésil, González-Martín & Hernandes-Gomes, 2018). Mais d'autres aspects peuvent soulever des difficultés, comme la nécessité de combiner plusieurs représentations qui apparaît dans les applications et n'est pas assez travaillée comme telle dans le cours de mathématiques (voir par exemple le cas de la trigonométrie dans les cours de génie électrique, Gueudet & Quéré, 2018). Le curriculum mathématique dans ces formations ne semble pas toujours adapté aux besoins réels des domaines ou des professions concernées. Il semble que les cours de mathématiques soient « isolés », en tout cas insuffisamment connectés aux autres cours et aux exemples venus des autres disciplines (Winsløw *et al.*, 2018). Naturellement, si dans les cours de mathématiques pour de tels étudiants la référence reste celle des pratiques des mathématiciens professionnels, la rupture avec les cours utilisateurs de mathématiques est inévitable. L'enjeu serait donc de faire un lien entre les cours de mathématiques et les mathématiques présentes dans les autres disciplines, voire les mathématiques utilisées par les professions visées par ces formations.

D. Les enseignants de l'université, attentes et pratiques

Les travaux concernant les enseignants de l'université ne sont pas tous centrés sur des questions de transition. Nous retenons ici des aspects qui nous semblent importants pour éclairer cette transition : les *a priori* des enseignants sur ce que les étudiants savent (ou ne savent pas) en arrivant à l'université, ainsi que certains aspects des pratiques d'enseignement.

1. Une surestimation par les enseignants du supérieur des connaissances disponibles des étudiants

Il est important de pouvoir s'appuyer à l'université sur des contenus enseignés, et appris par les élèves au niveau du lycée. Il y a une continuité qui bien qu'implicite existe bel et bien. Les physiciens ont par exemple pensé que la précédente réforme des programmes du lycée en physique n'aurait pas d'incidence pour leurs enseignements à l'université, mais ils ont découvert qu'ils s'appuyaient sur des connaissances du lycée qui ne sont plus un support suffisant actuellement (Bernard, Lémonon, Sauvage, Lanco, & Saby 2013). Il en va de même des mathématiques. Les mathématiciens ont parfois tendance à dire que l'enseignement des mathématiques commence réellement à l'université et qu'il y a lieu de tout reconstruire « correctement ». Mais une telle reconstruction n'est possible que parce qu'elle se fait en « proximité » avec des contenus enseignés et fréquentés par les élèves au lycée, et

que cela reste nécessaire². Il y a donc une illusion dans l'adage « *on reprend tout à zéro* ». Mais pour qu'une « proximité » entre ce qui est introduit à l'université et les connaissances du secondaire des étudiants soit pleinement opérationnelle, il faut également qu'il n'y ait pas une trop grande « distance », et donc en particulier qu'il n'y ait pas une surestimation des connaissances des étudiants considérées comme disponibles par les enseignants.

Des attentes surestimées concernant les connaissances sur les nombres

Un certain nombre de savoirs, qui sont nécessaires à la reconstruction opérée ou revendiquée par les mathématiciens à l'université, ne sont plus assez fréquentés par les lycéens et donc mettent en difficulté les étudiants au début de l'université : il s'agit notamment du travail sur les nombres réels, et plus globalement sur les ensembles de nombres (voir annexe). Dans le curriculum français, actuellement, les savoirs sur les réels ne font l'objet d'aucun enseignement explicite et sont passés sous silence. Mais il faut reconnaître que ces savoirs entrent en jeu dans l'apprentissage des premières notions de l'analyse. Dans l'encadré ci-dessous nous détaillons le cas du théorème des valeurs intermédiaires.

Le théorème des valeurs intermédiaires

L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires (TVI) amalgame deux notions de continuité. Celle des fonctions elles-mêmes d'une part et celle de la continuité de l'ensemble de départ d'autre part. La continuité sous ces deux aspects n'étant pas explicitement questionnée au lycée, l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires se fait toujours en appui sur un graphique qui est supposé donner à voir, justifier - et dans une certaine mesure prouver - l'existence affirmée par le théorème. Durand-Guerrier et Vivier (2016) proposent à des étudiants de première année un test portant sur l'utilisation du TVI dans un contexte où une représentation graphique de fonction continue est proposée. Un tiers d'entre eux répondent que la solution à l'équation proposée $f(x)=2$ est dans D , l'ensemble des nombres décimaux, ce qui n'a aucune raison d'être vrai, le graphique représentant une fonction tout à fait générique. Ce genre de réponse est sans doute renforcé par la pratique habituelle au lycée de ne mettre en fonctionnement au mieux que des nombres décimaux. Durand-Guerrier et Vivier montrent plus précisément que des étudiants à l'université n'identifient pas les propriétés de D , soit qu'ils amalgament D à l'un de ses sous ensemble D_n (nombres décimaux avec n chiffres après la virgule), soit qu'ils ne considèrent pas de propriétés intermédiaires entre le discret et le continu.

Les difficultés des étudiants concernant les nombres réels sont sans doute renforcées par un usage fréquent de la calculatrice dans les exercices mettant en jeu des fonctions, la calculatrice ne donnant à voir que des nombres décimaux et masquant peut-être encore plus que dans l'environnement papier crayon ce qui est en jeu. Cependant, avec l'introduction de l'algorithmique dans les programmes et l'utilisation accrue des outils informatiques, la question du statut des nombres pourrait revenir sur le devant de la scène dans les pratiques au lycée et bénéficier alors à l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse dès le début de l'université.

² Par exemple, Bergé (2016) montre qu'il y a une dialectique entre la compréhension de la notion nouvelle de borne supérieure à l'université et la fréquentation du système des nombres réels, en particulier une sensibilisation déjà présente des étudiants à la complétude de \mathbb{R} . Cela reste une notion très difficile car elle embarque également des connaissances nécessaires sur la logique et la quantification.

Des attentes surestimées sur des connaissances numériques et algébriques de base

Un autre aspect porte sur les compétences numériques et algébriques faibles des étudiants, qui sont la cause de nombreuses erreurs (figure 2).

Figure 2. Exemple de production d'étudiant de L1 sur un exercice de développements limités

$$2) \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)}{\left(-1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)}$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4}\right)$$

Ces déficits de connaissances algébriques et numériques sont bien connus des enseignants de lycée³, et souvent sous-estimés par les enseignants du supérieur.

Il y a peu de publications didactiques de cet ordre mais plutôt une montée en puissance dans les universités de tests de positionnement des étudiants. Ces tests ont comme objectif premier de pointer pour les étudiants eux-mêmes leurs lacunes, mais éclairent les enseignants du supérieur sur celles-ci.

Exemples de résultats issus de tests de positionnement en début d'université

Dans ces types de test à l'Université Paris Diderot, sur une population de 513 étudiants en 2015 et 616 étudiants en 2016, les taux de bonne réponse à un QCM sur « $2 \times 2^n = ?$ » sont de l'ordre de 80 % (relativement stable). Sur cette même population une question sur la limite de $(x-1)/(x+1)$ quand x tend vers $+\infty$ mène à 52 % et 55 % de bonnes réponses seulement. Bon nombre de tels tests existent dans la littérature, renouvelés régulièrement et concernant plusieurs universités en France. Ils tendent à être médiatisés – notamment dans le cadre de la C2IU (Commission Inter IREM Université) – afin d'alerter les enseignants des universités sur les connaissances des étudiants actuellement. Il reste toutefois des surestimations. Par exemple des connaissances des étudiants sur la triple écriture de l'appartenance d'un nombre à un intervalle $x \in [a,b]$; $a \leq x \leq b$; $|x - (a+b)/2| \leq (b-a)/2$ sont systématiquement surestimées alors qu'elles sont largement manipulées dès le début de l'analyse réelle. Un test effectué à Paris 13 – certes en 2005 – pointait que le taux de réussite des étudiants à des tâches de ce type, dans le domaine numérique, était inférieur à 8 % (« exprimer au moyen d'une valeur absolue les expressions suivantes : $-1 \leq x \leq 3$; $x \in] 2,3 [$; $5,5 \leq x \leq 6,5$ »). Comment alors au début de l'université pouvoir manipuler aisément des écritures telles que $L-\varepsilon \leq f(x) \leq L+\varepsilon$, $-\varepsilon \leq f(x)-L \leq \varepsilon$ et $|f(x)-L| \leq \varepsilon$?

³ Enquête C2IU : http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/bilan-enquete_reforme_lycee-c2iu-nov_2016.pdf

Des attentes surestimées concernant les usages des définitions des objets mathématiques

Un autre aspect sur lequel les enseignants du supérieur surestiment les connaissances des étudiants et que nous souhaitons souligner est plus transversal et porte sur les usages d'objets génériques, et particulièrement les définitions d'objets et concepts génériques. On le voit avec les exemples de définitions des nombres réels dans les manuels scolaires, les définitions sont parfois plus des étiquetages que de réelles définitions dans l'enseignement secondaire et elles ne sont pas au cœur de l'activité mathématique. Elles ont par contre un rôle clef dans l'enseignement supérieur. En algèbre comme en analyse, les définitions sont souvent un outil premier pour entrer dans la résolution d'une question ou la constitution d'un nouveau savoir mathématique. Espérer redéfinir « toutes les mathématiques » au début de l'université – ce dont on a dit plus haut que c'est illusoire – est d'autant plus difficile que les étudiants arrivant à l'université n'ont pas de pratiques habituelles vis-à-vis des définitions. Ouvrier-Buffet (2015) montre – dans le cas des mathématiques discrètes – que les élèves et les étudiants ont des difficultés dans les activités de constructions de définitions mais elle stipule également qu'ils ont des difficultés dans leurs usages des définitions dans leur activité mathématique propre. Au niveau international Tall et Vinner (1981) ont introduit la distinction entre « concept image » et « concept définition » pour signifier la dualité récurrente de compréhension des concepts mathématiques par les étudiants. Le concept image est la totalité fonctionnelle associée au concept, incluant les images mentales, les propriétés retenues comme pertinentes etc. Le concept définition est l'analogue intériorisé de la définition mathématique du concept. Les auteurs mettent en évidence que les deux conceptions peuvent coexister longtemps chez les étudiants, ceux-ci faisant appel tantôt à l'une tantôt à l'autre selon l'exercice auquel ils sont confrontés et ce bien que les deux conceptions puissent être en relative opposition.

Selon les enseignants, d'un point de vue logique, « *une définition est une condition nécessaire et suffisante, elle doit être minimale, non redondante et constituée à partir de mots déjà définis antérieurement* » (Ouvrier-Buffet, 2015). Cette logique n'est pas toujours respectée dans les pratiques au lycée (ni dans les manuels) où on trouve des définitions qui sont redondantes, parfois plusieurs définitions des mêmes objets ou des propriétés dont l'équivalence avec la définition n'est pas montrée. En outre, les élèves du lycée n'ont que rarement la charge d'assimiler des définitions, qui sont introduites, illustrées et souvent assimilées au cours d'activités et d'exercices. Ils ne sont pas confrontés en première instance à des définitions. Il n'y a pas de travail explicite sur les définitions elles-mêmes des objets, par exemple en exhibant systématiquement des objets qui ne vérifient pas les définitions, ce qui est une pratique usuelle à l'université et ce qui est relevé dans les recherches sur les exemples comme étant important dans l'activité mathématique (Leininger-Frezal, 2016). Les élèves sont donc assez démunis pour travailler seuls et apprendre leur cours, ce qui leur est souvent reproché par les enseignants de l'université. Les étudiants ne sont pas non plus dans une démarche d'apprentissage des définitions, à partir du moment où ils les ont comprises et où ils savent les mettre en actes dans les exercices qui leur sont demandés. Ce n'est en effet pas le même usage qui est forcément fait des définitions au lycée et à l'université. Ainsi, à l'université, les définitions constituent souvent un outil pour prouver des propriétés (on peut penser aux questions classiques en algèbre linéaire par exemple). Il faut rajouter à ce problème de point de vue et d'usage sur les définitions toutes les difficultés et les compétences logiques des étudiants qui là aussi sont largement surestimées par les enseignants du supérieur et qui ne permettent pas aux étudiants d'utiliser à bon

escent les définitions qui leur sont proposées⁴.

2. Pratiques d'enseignement en mathématiques dans le supérieur

Au niveau international, les recherches sur les pratiques d'enseignement dans le supérieur étaient relativement rares jusqu'au début des années 2000. Ainsi Speer, Smith et Horvath (2010) montrent dans une revue de travaux sur ce thème qu'il existe quelques recherches, mais que celles-ci correspondent à des études de cas plutôt spécifiques. Ils donnent des exemples de travaux (menés aux États-Unis) portant sur une approche par la résolution de problèmes, un enseignement expérimental d'équations différentielles, les pratiques d'un enseignant débutant, par exemple. Ces recherches amènent des résultats intéressants, mais dont la portée est limitée.

Les travaux sur ce thème se sont depuis assez largement développés, sans doute en lien avec l'introduction dans certains pays de formations pour les enseignants du supérieur. Winsløw *et al.* (2018) notent que plusieurs recherches dans le contexte des conférences européennes CERME s'intéressent à différents aspects des pratiques enseignantes au supérieur. Ces aspects peuvent être spécifiques de l'université : comme le format particulier du cours magistral, ou les conséquences du fait que les enseignants soient aussi des chercheurs. Ils peuvent aussi être plus généraux, comme les usages des technologies ou d'autres ressources.

Des spécificités du supérieur : le cours magistral ; les déroulements ; l'articulation enseignement-recherche

On pourrait s'attendre à ce que les recherches sur les cours magistraux aboutissent à des résultats très critiques, du fait du peu d'activité proposé aux étudiants dans ce contexte. Ce n'est en fait pas le cas, et les recherches montrent plutôt les intérêts possibles du cours magistral, et le fait que les étudiants apprécient particulièrement ce format (voir par exemple Bergsten, 2011, pour le cas de la Suède). On note aussi une différence entre secondaire et supérieur au niveau des déroulements des cours et des séances d'exercices (Grenier-Boley, 2009). Par exemple, il y a une accélération du temps didactique⁵, avec un renouvellement rapide des objets mathématiques enseignés, qui oblige à des assimilations plus rapides au niveau de l'université. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages.

Une autre particularité importante de l'université est que les enseignants sont aussi par ailleurs des chercheurs ; ceci a nécessairement des conséquences sur leurs pratiques d'enseignement, qui peuvent être positives ou négatives. Les premiers travaux étudiant cette question allaient plutôt dans le sens de conséquences négatives. Burton (1999, 2004) a interviewé environ 70 mathématiciens au Royaume-Uni à propos de leurs perspectives sur l'enseignement. Ces mathématiciens reconnaissent qu'il peut exister plusieurs styles de pensée en mathématiques. Ils admettent aussi avoir eux-mêmes un style dominant, mais ils ne considèrent pas que ce style influence leur enseignement. Ils ne pensent pas non plus qu'il soit important d'être attentif aux différents styles possibles des étudiants.

⁴ Présentation de Gwenola Madec à la journée IHP du 21 mars 2018 :

http://www.cfem.asso.fr/actualites/MADECJournée_TransitionCFEM_mars18.pdf.

⁵ Le temps didactique désigne la succession des objets de savoir dans l'enseignement (Chevallard & Mercier 1987).

Des travaux plus récents amènent à tempérer ces constats inquiétants. Nardi, Jaworski et Hegedus (2005) montrent que les mathématiciens sont très soucieux de la qualité de leur enseignement, et réfléchissent volontiers aux pratiques mathématiques de leurs étudiants. Mesa et Cawley (2015) ont travaillé avec des enseignants de l'université engagés dans un vaste projet d'enseignement suivant des « démarches d'investigation ». Elles montrent que les enseignants sont très impliqués dans ce projet, qui permet de rapprocher les pratiques d'enseignement et les pratiques de recherche. Les pratiques d'enseignement des participants ont évolué au-delà du simple cadre du projet.

Un groupe constitué de chercheurs de France et de Belgique a initié des travaux sur les pratiques des enseignants chercheurs dans les universités en sciences et en mathématiques en particulier. Le parti pris des chercheur.e.s investi.e.s dans ces recherches est de questionner l'idée de « transformation des pratiques pédagogiques » posée comme nécessaire par l'institution (voir rapport STRANES, Béjean & Monthubert, 2015) et de prendre l'injonction à la transformation comme un levier pour décrire et comprendre les pratiques qui seraient à transformer. Il s'agit de poser un regard outillé théoriquement et méthodologiquement sur des pratiques de natures variées (ordinaires, instrumentées, déclarées) pour accéder à une compréhension fine des choix et des motivations des enseignant.e.s-chercheur.e.s. Cette démarche de compréhension prend pour entrée la discipline académique de recherche des enseignant.e.s-chercheur.e.s et se nourrit de la confrontation des disciplines explorées (mathématiques, physique, chimie, géographie) dans une visée comparative. Elle requiert la mobilisation de cadres extra-didactiques (identité professionnelle) et l'affinement des cadres didactiques usuellement mobilisés pour les analyses de pratiques dans l'enseignement primaire et secondaire. Cela conduit à la production de nouveaux outils théoriques d'analyse qui permettent de prendre en charge la spécificité de l'institution considérée (un.e enseignant.e-chercheur.e qui enseigne est un.e chercheur.e qui enseigne, son identité d'enseignant.e est marquée par sa discipline de recherche et par des tensions entre les normes tacites qui pilotent l'activité d'enseignement et les normes individuelles : « ce que je fais n'est pas ce qu'il faudrait faire, mais n'est pas non plus ce que je souhaiterais faire »). L'objet « pratiques des enseignant.e.s-chercheur.e.s » étant exploré au prisme de plusieurs disciplines, cela permet de dégager des spécificités directement liées aux disciplines considérées et également quelques invariants (Cologne et de Hosson, 2016 ; de Hosson *et al.*, 2015 ; Bridoux *et al.*, 2016 ; Leininger-Frézal, 2016).

Les usages de ressources par les enseignants du supérieur pour concevoir leur enseignement

On peut penser *a priori* que les enseignants du supérieur sont très libres dans la conception de leurs enseignements, puisqu'ils élaborent eux-mêmes les textes de contrôles et d'examens : ils ne sont pas soumis à des attentes externes comme les enseignants du secondaire, soumis dans la plupart des pays aux exigences de la préparation à un examen final externe. Or les résultats de recherches ne vont pas en ce sens.

Dans les pays où il existe un manuel de référence à l'université, comme aux États-Unis ou au Canada, les recherches montrent que ce manuel constitue une ressource centrale pour les enseignants. González-Martín (2015) observe que les cours des enseignants (ici dans le cas des séries entières, au Canada) suivent de très près le manuel. Mesa et Griffiths (2012) constatent également que le manuel est très utilisé par les enseignants pour concevoir leur cours ; de plus ils montrent que ces enseignants incitent les étudiants débutants (ici pour un cours d'analyse en première année, aux États-Unis) à utiliser le manuel pour travailler plutôt sur les exercices, afin d'apprendre des techniques. Ils considèrent que ces étudiants ne sont pas encore prêts à lire des textes

mathématiques, et qu'il ne s'agit pas d'un objectif d'enseignement, dans le cas d'étudiants non-spécialistes.

En France, l'absence de manuel crée une situation très différente. Gueudet (2017) a étudié le cas de six enseignants de mathématiques à l'université, avec des profils très différents. Deux doctorants ont uniquement l'expérience de travaux dirigés (TD). Pour eux, les ressources centrales sont les feuilles de travaux dirigés. Leur responsabilité est limitée ; en effet, le responsable du cours magistral leur indique ce qu'il a fait en cours, mais également les exercices qui doivent être traités dans les TD. Il leur reste donc à prendre connaissance de ces exercices, et à gérer la séance de TD. Leur plus grande responsabilité en termes de conception de support a été limitée jusque-là à la participation à l'élaboration d'un sujet de contrôle continu (en appui sur les sujets donnés les années précédentes). On peut supposer qu'au-delà du cas de ces deux doctorants, cette limitation des responsabilités dans la conception de supports est fréquente ; on peut considérer ceci comme une entrée progressive dans le métier. Cependant ce mode d'entrée ne laisse guère la possibilité aux jeunes enseignants de s'écarter des approches inscrites dans les feuilles de travaux dirigés existantes, de proposer un exercice différent etc. Pour les enseignants expérimentés, il semble y avoir un contraste entre une totale liberté de conception du contenu dont ils bénéficient pour certains enseignements très spécifiques, et une tradition bien installée pour les enseignements plus courants comme les enseignements d'analyse ou d'algèbre linéaire.

On pourrait aussi penser que dans le supérieur, l'usage des technologies éducatives est largement développé, depuis les logiciels spécifiques aux mathématiques comme ceux dédiés au calcul formel, à des outils transversaux comme Moodle. Cependant, en dehors là encore d'enseignements spécifiques (comme un module consacré au calcul formel), Gueudet (2017) observe que les technologies sont très peu présentes dans les ressources utilisées par les enseignants ou proposées aux étudiants. Parfois le recours au numérique est limité à la mise à disposition en ligne d'une version numérique du photocopié, pour les cours qui disposent d'un tel photocopié, et des feuilles de travaux dirigés. Il semble aussi que les enseignants, contrairement à leurs collègues du secondaire, ne cherchent presque jamais de ressources pour leur enseignement sur Internet. Ils considèrent qu'une telle recherche serait une perte de temps, et qu'ils ne trouveraient pas une ressource correspondant précisément à leurs attentes. De plus, la calculatrice, qui a été largement utilisée au secondaire, est interdite à l'université. Cette situation ne semble pas spécifique du cas de la France. Dans une étude menée au Canada, Broley, Caron & Saint-Aubin (2018) mettent en évidence l'écart très important entre le recours par des mathématiciens à la programmation, quand il s'agit de leur recherche, et quand il s'agit de leur enseignement. Ils identifient plusieurs facteurs expliquant cet écart : un environnement institutionnel peu favorable, mais aussi leurs propres doutes sur les apports du numérique, lorsqu'il s'agit d'enseignement des mathématiques.

E. Pratiques des étudiants dans l'enseignement supérieur

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'université est un cadre institutionnel spécifique, dans lequel les pratiques d'enseignement des mathématiques changent par rapport à celles de l'enseignement secondaire. Le format des enseignements est différent, avec des cours magistraux en amphithéâtre et des travaux dirigés. Dans le contexte de l'université, il y a généralement peu de travail personnel demandé explicitement et ce travail peut être librement fait ou non. La situation est très différente en classe préparatoire, où au contraire une quantité importante de travail personnel est

donnée en dehors des cours (Farah 2015) ; l'apprentissage régulier du cours y est explicitement attendu et fait l'objet d'un suivi notamment par le biais d'interrogations orales régulières (Lalaude-Labayle 2016).

Du point de vue des supports proposés aux étudiants, en France il n'y a plus, contrairement au lycée, de manuel scolaire de référence. Ceci diffère d'un certain nombre de pays, pour lesquels le cours à l'université est toujours associé à un manuel. À l'université en France, il y a pour les mathématiques des listes d'exercices, et dans la plupart des cas un polycopié de cours. Dans tous les cas les notes prises par les étudiants à partir du cours du professeur constituent une ressource essentielle pour leur travail.

Ces changements par rapport au secondaire peuvent entraîner certaines difficultés.

Lew *et al.* (2016) ont travaillé sur ce que les étudiants notent, perçoivent et retiennent d'un cours magistral, et l'ont comparé aux intentions du professeur donnant ce cours. Ils ont mis en évidence un écart problématique entre les deux. Ils ont relevé d'une part que le professeur parle généralement trop vite pour que les étudiants puissent tout noter. Une partie du discours du professeur est écrit au tableau. Mais certaines choses importantes restent à l'oral, et très peu d'étudiants sont en capacité de les noter. Ils ont également observé que s'il y avait un élément manquant dans les notes prises par les étudiants, ceux-ci n'étaient généralement pas capables de reconstituer cet élément. Ceci rejoint le travail effectué en France par Farah (2015) dans le contexte des classes préparatoires économique et commerciales. Elle a montré que certains étudiants ne prennent pas note de tout ce qui est écrit au tableau (les étudiants soulignent le rythme très rapide, d'où une difficulté à noter), et qu'environ la moitié des étudiants ne notent rien de ce qui reste seulement oral.

Au-delà de ce simple problème de prise de notes, en examinant de plus près le contenu d'un extrait de cours (une démonstration concernant les suites), Lew *et al.* (2016) ont montré que le professeur avait l'intention de faire passer une idée principale, sur laquelle il a insisté mais uniquement oralement. En interrogeant six étudiants choisis parmi ceux qui avaient suivi ce cours, ils ont ensuite constaté que cinq d'entre eux n'avaient pas pris note de cette idée, et surtout aucun des six ne la considérait comme importante. En s'intéressant plus précisément aux démonstrations, ces auteurs ont de plus montré dans une autre étude (impliquant 175 étudiants et 83 enseignants) que du point de vue des enseignants à l'université, une preuve est un support pour apprendre une démarche qui peut être utilisée dans d'autres contextes. Pour les étudiants, la portée d'une preuve est limitée à son contenu : comment de nouveaux résultats sont déduits de résultat connus.

L'utilisation faite par les étudiants des ressources proposées par l'institution ne correspond pas non plus toujours avec ce que les enseignants en attendraient. Dans une enquête menée auprès d'étudiants de première année ayant suivi un module d'arithmétique (85 réponses), Gueudet et Lebaud (2014) ont observé que la première ressource citée comme utile par les étudiants est la liste d'exercices (96 % l'utilisent beaucoup), tandis que seulement 52 % des étudiants déclarent utiliser le polycopié « moyennement » ou « beaucoup ». Les étudiants trouvent en fait que leurs notes de cours sont suffisantes. Dans le même temps, des étudiants rencontrés en entretien ont déclaré que dans les cours où il n'y avait pas de polycopié, celui-ci leur manquait. L'utilisation principale du polycopié semble être pour les révisions avant les examens ou contrôles continus. De plus, une recherche portant sur les ressources utilisées par les étudiants et sur l'usage qui en est fait (Gueudet & Pepin 2018) a permis d'observer que dans les polycopiés, les étudiants se concentrent sur les

exercices résolus, et s'attachent à repérer des méthodes qu'ils pourront reproduire. Ceci rejoint des observations faites notamment par Castela (2004). Comparant le travail personnel en mathématiques des étudiants de l'université et de ceux de classes préparatoires, elle a montré que les étudiants de l'université travaillent sur des exercices plutôt en visant la reproduction de techniques utiles à l'examen, acquises par un entraînement intensif et répété (des observations semblables ont été faites en Suède par Lithner, 2003). Les étudiants de classe préparatoire en revanche travaillent de manière à pouvoir aborder des problèmes nouveaux, en analysant des méthodes de résolution afin de pouvoir les transférer. Castela attribue ces différences notamment aux modes d'évaluation en vigueur dans les deux institutions (voir sur ce point le travail sur les évaluations à l'université évoqué ci-dessus Gueudet & Lebaud, 2008). Les travaux de Farah (2015) amènent à contraster en partie ces observations. Elle montre en effet que les étudiants même en classes préparatoires travaillent en priorité à apprendre des définitions et des formules (mais il s'agit de classes préparatoires économiques et sociales, ce qui peut induire des différences). Cependant, si ces étudiants travaillent en début d'année au rythme de la préparation des contrôles, ils s'en détachent nettement en cours d'année pour s'inscrire dans une perspective de travail régulier et à long terme.

On pourrait penser qu'en termes de ressources utilisées par les étudiants pour leur travail personnel, une évolution importante est le recours fait à Internet. Cependant dans le questionnaire évoqué ci-dessus, seulement 44 % des étudiants répondants disent en utiliser « moyennement » ou « beaucoup » des ressources trouvées sur Internet pour leur travail personnel. Des entretiens ont montré par ailleurs que l'utilisation de ces ressources peut poser problème, si celles-ci ne correspondent pas en fait aux contenus introduits dans le cours.

Un autre phénomène d'évolution que les étudiants soulignent comme important par rapport à leurs habitudes du secondaire (Gueudet & Pepin, 2018) est que les enseignants sont moins disponibles. Dans cette étude qui porte sur l'Angleterre et la France, un étudiant en Angleterre déclare que les professeurs sont « comme des stars de cinéma » - peut-être un phénomène lié au prestige des grandes universités anglaises, en tout cas en conséquence cet étudiant n'ose pas poser de questions, ni même aller consulter le professeur pendant les « *office hours* », temps de permanence dédié aux rencontres avec les étudiants justement. En conséquence c'est le travail avec d'autres étudiants qui devient essentiel ; le travail collectif des étudiants est indiqué comme une pratique nouvelle par rapport au secondaire et très positive. Ce développement d'un travail collectif et son appréciation très positive par les étudiants sont également constatés dans le contexte des classes préparatoires par Farah (2015).

II. À propos des dispositifs visant à surmonter ces difficultés

Du point de vue des travaux de recherche en didactique proposant ou évaluant des dispositifs visant à surmonter les difficultés de la transition secondaire-supérieur, on note que ceux-ci concernent essentiellement des expériences menées dans l'enseignement supérieur. Ceci correspond probablement au fait qu'il est peut-être plus simple de mettre en place des dispositifs expérimentaux dans le cadre de l'université que dans celui du lycée, notamment en France : la proximité du baccalauréat engendre des contraintes qui font obstacle aux enseignements expérimentaux à ce niveau.

A. Faire découvrir l'université aux élèves de lycée

1. Les stages Hippocampe ou les stages MathC2+

En France, certains dispositifs tels que les stages Hippocampe initiés à l'Université de Marseille, ou les stages Math C2+ organisés par l'association Animath permettent à des lycéens (voire à des collégiens) de découvrir l'environnement universitaire et de s'initier au travail qui sera attendu d'eux. Par exemple, les stages Hippocampe (Malige, 2013 ; Arnoux et Vaux, 2012) étaient initialement prévus pour des élèves scientifiques et se sont ouverts à d'autres publics du secondaire. Ils se sont diffusés régulièrement en France, notamment à travers le réseau des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques⁶). Un stage mobilise une petite équipe d'encadrants scientifiques qui accueillent les lycéens d'une classe, leur présentent un thème scientifique qui va être travaillé en petits groupes sur une durée de 3 jours. Les trois jours alternent travail de groupe et présentations. En particulier, le stage se conclut par une présentation de posters et présentés à tous les chercheurs des départements de mathématiques. L'enseignant de la classe est généralement présent sur les trois jours mais n'intervient pas du tout dans l'encadrement des élèves. Cela mobilise une certaine logistique entre l'établissement et l'université pour libérer les lycéens trois jours. Cela ne peut malheureusement concerner que peu de classes et il y a plus de demandes que de possibilités d'accueil dans la mesure où cela mobilise des chercheurs sur un temps qui n'a pas forcément une reconnaissance de l'institution. Il s'agit pour les élèves d'une immersion bien plus intéressante que de simples portes ouvertes, donnant à voir une université qui n'est pas nécessairement inaccessible. Comme dans tout dispositif de ce type qui rompt avec les pratiques habituelles de classes, on observe fréquemment des retournements où des élèves « faibles » du lycée prennent l'initiative dans un groupe de recherche. Les évaluations de ces stages sont systématiquement positives même si les organisateurs de tels stages savent qu'il n'y a pas d'évaluation sérieuse des résultats à moyens ou longs termes de ces expériences sur les réussites des étudiants à l'université.

2. Filles et maths, une équation lumineuse

Certains stéréotypes peuvent faire obstacle à l'orientation des filles vers des études comportant une part importante de mathématiques. Dans ce contexte la découverte de ce que se fait effectivement à l'université a un autre objectif : attirer les filles vers ce type d'études, en surmontant ces obstacles liés aux stéréotypes. Depuis 2009, l'association Femmes et mathématiques organise dans toute la

⁶ Les IREM sont des composantes universitaires qui permettent la collaboration entre enseignants de mathématiques du primaire, secondaire et du supérieur, au sein de groupes thématiques sur l'enseignement de contenus spécifiques, et dont le but est de drainer de la formation continue et/ou de concevoir des ressources pour les enseignants.

France des présentations pour des élèves du secondaire, de la Troisième à la Terminale, dans le cadre de l'opération intitulée « Filles et maths, une équation lumineuse ». Il s'agit de donner aux filles spécifiquement une meilleure représentation des métiers scientifiques, et à les sensibiliser aux stéréotypes qui peuvent les amener à se dévaluer.

B. Dispositifs d'aide aux étudiants

Les dispositifs que nous évoquons dans cette partie visent à prendre en charge les difficultés des étudiants sans modifications des enseignements destinés à tous les étudiants. Il s'agit de dispositifs de type « soutien » aux étudiants. Dans cette perspective de soutien, de nombreuses modalités sont envisageables : diagnostic de difficultés organisé ou non par l'institution ; horaire consacré au soutien ; coordination ou on avec les autres enseignements, contenu du soutien ; évaluation notée etc. Nous donnons ci-dessous quelques exemples correspondant à des dispositifs qui ont été implémentés à une échelle large.

1. Exemple des support centers au Royaume-Uni

Au Royaume-Uni, suite au constat fait à la fin des années 1990 des difficultés croissantes des étudiants que nous avons évoqué en introduction (*Engineering Council*, 2000), certaines universités ont commencé à ouvrir des lieux destinés à soutenir les étudiants en mathématiques. Ces lieux, nommés « mathematics support centers » (Lawson & Croft, 2018) étaient d'abord destinés aux étudiants non spécialistes, mais rapidement la nécessité est apparue de les ouvrir également aux étudiants de mathématiques (actuellement 25 % des étudiants fréquentant les *support centers* sont des étudiants de mathématiques). Désormais mis en place dans de très nombreuses universités et fédérés dans le réseau Sigma⁷ (Croft, Grove & Lawson, 2016) les *support centers* qui étaient plutôt décriés lors de leur ouverture sont désormais une institution reconnue (qui court cependant un risque permanent de manque de financement).

Les étudiants les fréquentent à leur choix, sur la base du volontariat et non par obligation ou demande des professeurs. La fréquentation des *support centers* ne se traduit pas par une note ou une quelconque évaluation. Le *support center* est un endroit agréable, dont l'aménagement est pensé pour que les étudiants se détendent autant que possible. Il offre des ressources : livres, exercices interactifs. Les étudiants peuvent aussi durant certaines sessions (nommées « Drop-in sessions ») bénéficier de la présence de tuteurs, qui peuvent être des doctorants mais aussi des enseignants expérimentés de l'université. Le travail d'enseignant dans ces *support centers* demande certaines compétences particulières : en effet il faut résister aux étudiants qui cherchent simplement quelqu'un pour faire les exercices à leur place, et leur faire apprendre à chercher par eux-mêmes. Le *support center* peut aussi être un lieu où les étudiants apprennent à travailler ensemble.

L'évaluation de ces dispositifs est plutôt positive, en termes de réussite des étudiants qui les ont fréquentés, et aussi comme formation des étudiants à un travail plus collectif. Cependant les études montrent aussi que les étudiants les plus en difficulté ne viennent pas dans un *support center*. De plus, la remontée de constats intéressants par les enseignants du *support center* vers les enseignants de cours et travaux dirigés est insuffisante.

⁷ <http://www.sigma-network.ac.uk/about/mathematics-and-statistics-support-centres/>

2. Opération Tremplin à Namur

À l'Université de Namur en Belgique, l'« Opération Tremplin » (de Vleeschouwer, 2008) propose des séances de remédiation sur des matières scientifiques, à la demande des étudiants, chaque mercredi matin (une plage horaire de 2 à 4 heures, intégrée dans l'emploi du temps hebdomadaire, est réservée aux remédiations. Les contenus des séances sont discutés lors de réunions hebdomadaires réunissant des professeurs et des délégués d'étudiants. Ces délégués sont élus par leurs pairs ; leur rôle est de collecter chaque semaine les questions, de les trier et les réorganiser pour les présenter aux professeurs. Les réunions entre les professeurs et les délégués sont l'occasion d'aider ces derniers à préciser les questions formulées par les étudiants, et d'établir le programme du mercredi matin. Au-delà de l'explicitation de la matière étudiée, les séances de remédiation permettent d'amener progressivement les étudiants à trouver leurs propres méthodes pour travailler leur cours. Les enquêtes et recherches réalisées sur cette opération en font un bilan positif. Les étudiants sont très majoritairement satisfaits de ce dispositif, certains déclarent même qu'ils n'auraient pas pu réussir sans l'opération tremplin, et qu'ils n'auraient pas osé poser des questions en dehors de ce dispositif. Selon eux, plusieurs facteurs influencent le bon déroulement de cette opération, avec, entre autres : la représentativité des délégués étudiants, les discussions aux réunions hebdomadaires, la compétence du remédiateur. Les analyses menées du point de vue de la recherche (de Vleeschouwer, 2008) ont montré que les questions posées par les étudiants se précisaient au fil de l'année : en caricaturant, on pourrait dire qu'en début d'année, les étudiants déclarent qu'ils n'ont rien compris au cours de la semaine ; ensuite ils deviennent progressivement capables de préciser leurs besoins. L'opération tremplin permet d'accompagner l'entrée dans le nouveau contrat didactique. En effet, lors des échanges le mercredi matin, les enseignants sont amenés à présenter clairement ce qu'ils attendent, en termes de rédaction de textes mathématiques par exemple, mais aussi de travail personnel. Ainsi certaines attentes habituellement implicites sont explicitées aux étudiants.

3. Accompagnement des primo-entrants en France

En France, certaines universités ont aussi mis en place – initiatives souvent au moment du plan réussite en licence et qui se poursuivent parfois à la faveur d'Idex – des filières d'accompagnement des étudiants primo-entrants à l'université. Il est à noter qu'il peut s'agir de filières sélectives pour isoler et attirer des étudiants les meilleurs – principe des « prépa intégrées » ou des « bi-licence », ce qui n'est pas l'objet de notre propos ici - ou bien de véritables filières d'accompagnement des étudiants en difficulté. Il s'agit cependant rarement de démarches isolées des mathématiciens mais de filières construites dans des partenariats entre les disciplines.

A Limoges ou à Rouen par exemple, des dispositifs longs de remise à niveau (année L0) ont été mis en place au tournant des années 2010. Les impacts ont été visibles sur les résultats en L1, à la fois parce que les étudiants les plus faibles se retrouvaient naturellement dans ces dispositifs de remise à niveau, ce qui allégeait la L1 traditionnelle, mais aussi parce que les étudiants ayant suivi le dispositif de remise à niveau étaient plus performants dès qu'ils retournaient dans la L1. Ces dispositifs de remise à niveau étaient destinés aux étudiants qui n'avaient pas le niveau requis de terminale S, donc à des étudiants qui en principe n'avaient pas le baccalauréat correspondant à la filière scientifique. La moitié des étudiants environ dans ces dispositifs venaient donc d'un bac technologique, un petit quart de L ou ES, un quart enfin d'un baccalauréat professionnel. 5 % à 10 % étaient des étudiants étrangers. La réussite était effective pour les étudiants ayant suivi un bac général, mais

l'apprentissage théorique et abstrait déroutait tout de même fortement les étudiants issus de filières technologiques ou professionnelles dont les difficultés persistaient. Au final, la moitié des étudiants des dispositifs de remise à niveau et titulaires d'un baccalauréat général réussissaient ensuite leur première année classique, mais une majorité écrasante d'étudiants ayant suivi ces dispositifs (environ 70 %) se réorientaient vers un BTS ou un IUT à l'issue de la remise à niveau, majoritairement les bacheliers technologiques et professionnels. Du point de vue de l'université, cela peut donc être interprété comme un échec. L'effort fourni pour que des étudiants titulaires de baccalauréats professionnels ou technologiques puissent réussir à l'université en première année ne porte finalement pas ses fruits, mais conduit les étudiants à suivre des filières courtes. Si on considère l'ensemble des étudiants des dispositifs de remise à niveau, seuls 10 % à 15 % réussissent du coup leur première année. Les autres échouent ou se réorientent. La question de la place de ces dispositifs se pose alors : sont-ils à leur place dans les universités ou bien dans les lycées à l'instar des STS ? Peut-on concevoir un dispositif en amont de l'université (en terminale, voire en première) pour des élèves qui ont l'intention de s'engager dans des études longues ? Cette question est d'autant plus légitime que de tels dispositifs ont des coûts non négligeables, outre le fait qu'ils ne garantissent pas la poursuite d'études des étudiants dans l'université comme on l'a vu plus haut. Les expériences montrent ainsi que ces dispositifs nécessitent un fort investissement des acteurs et des universités ; ainsi, il n'est pas évident d'évaluer leur rentabilité à court terme⁸.

C. Enseignements s'éloignant des pratiques habituelles

1. Ingénieries dédiées à des contenus ciblés

De nombreuses ingénieries « locales », c'est-à-dire ciblant un contenu particulier, ont été et sont encore développées et analysées. Certains travaux sont très anciens, repris et développés récemment et ciblent l'entrée dans le formalisme. Il s'agit notamment d'ingénieries visant à la compréhension par les étudiants, comme outil et comme objet, de la définition formalisée de limite ou de celle de continuité en un point (Sghaier & Vandebrouck, 2018). Les modalités sont variées, basées sur des théories didactiques comme la théorie des situations didactiques (Ghedamsi & Lecorre, 2018). D'autres ingénieries prennent au contraire en compte l'idée que ces notions sont complexes (notion FUG, voir paragraphe I.1), qu'il n'est pas suffisant de constituer un milieu satisfaisant et qu'elles doivent être enseignées en utilisant le levier « méta » mathématique, c'est-à-dire un discours spécifique du professeur accompagnant des tâches et des activités agencées spécialement pour ces contenus (Bridoux, 2016 ; Chorlay, 2018).

D'autres travaux ciblent la compréhension de la structure des nombres réels avec les notions de complétude et de densité, et la dialectique du discret et du continu. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe comme on l'a dit dans la première partie d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît) à un point de vue plus théorique (axiomatique) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente (Bloch & Ghedamsi, 2005). Durand-Guerrier et Vergnac (2011) proposent par exemple à partir de ce constat, des pistes d'activités sur les écritures des nombres qui peuvent aider les élèves ou les étudiants à dissocier la nature des nombres de leurs écritures. Rogalski (2016) enfin développe l'idée que la compréhension des nombres réels et du

⁸ <http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ips13003pdf-e8e1.pdf>, p.48

début de l'analyse à l'université passe par la dévolution⁹ aux étudiants de problèmes d'approximation de nombre réels, qui pour lui est une « raison d'être » de la notion de limite. Il propose une suite de situations articulant trois dimensions et permettant d'aller progressivement jusqu'à la notion de limite : l'approximation d'un nombre, la formalisation, des aspects « méta » du début de l'analyse.

D'autres ingénieries visent à la compréhension par les étudiants de notions différentes, en algèbre linéaire par exemple. C'est le cas de la séquence construite dans les années 90 autour de la notion de carrés magiques et présentée en annexe. D'autres visent le travail sur les définitions (Ouvrier-Bufferet, 2011) ou l'entrée dans la pensée structuraliste de l'algèbre générale (Hausberger, 2016).

2. Impliquer activement les étudiants et donner du sens aux mathématiques

De nombreux travaux ont montré que l'implication active des étudiants, par exemple dans la résolution de problèmes mathématiques ou utilisant des mathématiques, était favorable aux apprentissages. La résolution de problèmes, ou d'autres moyens comme l'emploi de sources historiques authentiques, peuvent contribuer à donner du sens aux mathématiques enseignées. Ce constat a motivé la mise en œuvre d'enseignements expérimentaux dont nous donnons différents exemples ci-dessous.

En Espagne et en Amérique du Sud (Barquero, Serrano & Serrano, 2013 ; Costa, Arlego & Otero, 2014) plusieurs enseignements pour des non-spécialistes ont été donnés selon le principe des « Parcours d'Étude et de Recherche » (PER). Une question initiale est posée et son étude est confiée aux étudiants, qui vont formuler des sous-questions, mener une enquête, et finalement utiliser les mathématiques pour construire leurs réponses. La question initiale correspond à une situation réelle. Par exemple à l'Université Autonome de Barcelone (Barquero, 2018), a été mis en place un PER qui débutait par la question « Comment améliorer la répartition des vélos, dans le système *Bicing* à Barcelone ? ». *Bicing* est un système de location de bicyclettes dans l'espace urbain (de type Vélib) comme il en existe dans de nombreuses villes à travers le monde. Des données réelles sont mises à disposition des étudiants, concernant la répartition des vélos dans les différentes stations de la ville chaque jour à différents horaires, et le système actuel choisi par la compagnie gestionnaire pour le redéploiement des vélos. À Barcelone, ce PER a été mis en place dans un enseignement dédié à des projets mathématiques. Les étudiants travaillaient par équipes de 4 ou 5, sur une durée de 5 semaines avec chaque semaine deux séances de deux heures. Durant ces séances, ils effectuaient leurs recherches, en proposant des sous-questions à partir de la question initiale, en formulant et en étudiant des hypothèses relatives à ces sous-questions. L'enseignant les accompagnait dans la formulation des sous-questions et des hypothèses, et par des apports mathématiques. Les données initiales étant très nombreuses et complexes, l'enseignant avait ainsi suggéré dès la première séance de séparer la ville en 6 zones. Ce mouvement de simplification des données réelles est important dans le processus de modélisation. Ensuite les changements dans la répartition des vélos entre les 6 zones peuvent être représentés en utilisant un modèle mathématique (un apport est fait par le professeur, concernant ce modèle)). Les étudiants ont accès pour leurs calculs à un logiciel de calcul formel de type Maple. Les hypothèses et questions testées peuvent être : « Supposons qu'il n'y ait aucun redéploiement de vélos. Quelle sera la répartition après 2, 3, ... n jours, selon une répartition

⁹ La dévolution est un processus didactique par lequel le professeur parvient à faire en sorte que l'élève se sente responsable de l'obtention du résultat dans un problème.

initiale donnée ? ». Après l'effort initial de réduction de la complexité, les étudiants raffinent leurs modèles, en prenant en compte le temps moyen d'utilisation d'un vélo (30 minutes), la demande par zone géographique en fonction de l'heure de la journée etc. Ainsi cet enseignement a amené un travail sur des notions mathématiques complexes, mais qui sont toujours apparues comme nécessaires car utilisées pour travailler sur la question étudiée. Notons cependant que cet enseignement demande un travail de préparation très important à l'enseignant, qui doit anticiper les différentes pistes que les étudiants vont explorer, pour pouvoir intervenir et fermer des pistes qui n'amèneraient à rien, faire les apports mathématiques nécessaires sur les autres pistes etc.

En Finlande à l'Université de Helsinki, depuis plusieurs années est mené un enseignement suivant le principe nommé « extreme apprenticeship » (que l'on pourrait traduire par « apprentissage renforcé ») (Rämö, Oinonen & Vikberg, 2016). Il s'agit là encore de baser l'apprentissage sur la mobilisation des mathématiques pour la résolution de problèmes ; les problèmes utilisés balayent un large spectre en termes de difficulté. Les étudiants reçoivent en premier lieu des problèmes à résoudre (entre 15 et 20 problèmes par semaine), avec des apports mathématiques sous forme de documents écrits. Chaque semaine, il n'y a que 2 à 3 heures de cours magistral, mais 20 h de « drop-in sessions », c'est-à-dire que les enseignants assurent une permanence de tutorat dans une salle. Le travail écrit des étudiants est relevé et corrigé chaque semaine pour un ou deux des problèmes. Les étudiants sont libres de venir ou non consulter le professeur présent dans la salle pour recevoir de l'aide dans la résolution des problèmes qu'ils doivent traiter. Alors que les enseignements traditionnels sont centrés sur l'apprentissage de techniques, les chercheurs ont montré que la méthode « extreme apprenticeship » permettait une plus grande attention aux concepts et à leur sens.

En Allemagne Uysal et Clark (2019) ont mis en place un enseignement expérimental qui cette fois n'est plus centré sur la résolution de problèmes, mais sur la perspective historique. L'objectif poursuivi est de donner du sens aux concepts enseignés (ici il s'agit de géométrie) en permettant aux étudiants de découvrir l'évolution historique de ces concepts. De plus selon ces auteurs, le processus d'évolution historique des concepts correspond à l'évolution de ce qui est enseigné respectivement au secondaire et à l'université. Ainsi le travail sur l'évolution historique peut amener une prise de conscience par les étudiants de ce qui se joue lors de la transition secondaire-supérieur. Le travail est organisé sous forme de séminaires. Les étudiants disposent de textes historiques authentiques, mais aussi d'extraits de manuels. Ils observent à partir de ces sources des changements de point de vue sur les concepts au fil de l'histoire, et aussi dans le passage du secondaire à l'université.

3. Apports possibles du numérique

La très grande majorité d'enseignements visant l'implication active des étudiants, qu'il s'agisse d'expériences locales ou d'enseignements par projets pratiqués de manière régulière dans certaines filières font appel au numérique. Il s'agit d'une part d'utiliser des logiciels spécifiques : typiquement des logiciels de calcul formel, parfois des logiciels statistiques. D'autre part, pour la mise à disposition de ressources et le travail collectif les enseignants et les étudiants utilisent des espaces de partage de type Moodle. Les recherches en didactique associées ne se centrent toutefois pas sur cet apport du numérique, qui est intégré à titre d'outil comme le serait un photocopie sur papier. Ainsi dans cette partie nous considérons d'autres types d'apports, où le numérique est plus central : un MOOC développé récemment en France, des emplois d'exercices interactifs en France, des offres de cours

en ligne ; des enseignements de type « classe inversée » ; et l'emploi d'outils interactifs durant les cours en amphi.

MOOC pour préparer ou accompagner les étudiants à l'entrée dans le supérieur

En France, à l'initiative de la CFEM (Commission Française sur l'Enseignement des Mathématiques)¹⁰, un MOOC a été ouvert en août 2017 sur la plateforme France Université Numérique (FUN), porté par l'Université Paris Saclay, pour lutter contre l'échec des étudiants arrivant à l'université en sciences. Il n'y a pas eu d'étude d'impact, ce qui reste très difficile. Les statistiques de fréquentation ont pu apporter des éléments d'information sur l'usage d'un tel dispositif. Il s'avère que seulement 65 % des participants étaient en France mais surtout les auteurs¹¹ ont noté que les participants n'étaient que très minoritairement des primo entrants à l'université (20 % uniquement).

Au niveau de l'université proprement dite on trouve les vidéos du site exo7 qui couvre les trois premières années de l'université et qui sont susceptibles d'accompagner les étudiants¹². Les contenus sont découpés en nombreuses vidéos d'une quinzaine de minutes, élaborées par des mathématiciens¹³. On trouve quelques MOOC avec des contenus mathématiques sur le site FUN mais les recherches sur les usages des MOOC ont surtout montré que ces types de ressources n'étaient vraiment exploitables que par des étudiants en réelle autonomie et donc sans doute pas par des étudiants qui débutent leur enseignement supérieur (<https://journals.openedition.org/dms/1966>).

On trouve également des cours en mathématiques du Cnam, mais ils ne sont pas ciblés pour des étudiants qui arrivent de terminale S et on n'a aucune étude sur leur usage effectif par des étudiants. À l'étranger enfin, en Suisse par exemple, l'École polytechnique fédérale de Lausanne a également produit des MOOC (qui sont simplement des cours filmés), mais ils portent sur les programmes de l'enseignement supérieur.

Exercices interactifs, le cas de WIMS

WIMS¹⁴ (*WWW Interactive Multipurpose Server*) est une base d'exercices interactifs, qui était initialement dédiée aux mathématiques à l'université, même si elle désormais largement utilisée dans le secondaire et pour d'autres disciplines. WIMS permet aux étudiants de s'entraîner plusieurs fois sur un même exercice interactif, qui varie légèrement à chaque itération, permettant à l'étudiant d'atteindre un niveau d'expertise sur un point particulier. Les recherches didactiques (Cazes *et al.*, 2007) ont montré que cet outil est un vrai apport pour que les étudiants travaillent en autonomie, à leur rythme. Il s'agit toutefois de travailler des exercices techniques ou routiniers avec les étudiants. WIMS – ou ce genre d'exerciceur - ne semble pas permettre de travailler des compétences plus complexes et les activités des élèves peuvent ne pas être les activités attendues dès que les exercices présentent des adaptations de connaissances ou tout au moins des nouveautés pour les étudiants.

A l'université Rennes 1, l'outil WIMS a été utilisé au moment du plan « Réussir en Licence » (Lebaud, 2010). Actuellement, WIMS est encore utilisé pour des objectifs similaires, par exemple dans les

¹⁰ La CFEM fédère l'ensemble des associations professionnelles et de recherche et des sociétés savantes nationales touchant aux mathématiques et à leur enseignement. Elle entretient également des liens forts avec l'inspection générale de mathématiques. Voir <http://www.cfem.asso.fr/>

¹¹ Présentation de Gilbert Monna à la journée IHP du 21 mars :

www.cfem.asso.fr/actualites/Monna_JourneeTransition.pdf

¹² <http://exo7.emath.fr/index.html>

¹³ <http://revue.sesamath.net/spip.php?article341>

¹⁴ <https://wims.math.cnrs.fr/wims/>

universités de Marne-la-Vallée ou de Paris Diderot. David Doyen¹⁵ à la journée IHP du 21 mars 2018 montre bien qu'un tel dispositif n'a pas vocation à traiter tous les problèmes didactiques rencontrés et ne permet pas non plus d'atteindre tous les objectifs en termes d'apprentissage que l'on se fixe en licence pour les étudiants. Toutefois, un tel dispositif, avec un cadrage bien étudié (ici deux types de feuilles d'exercices par semaine d'enseignement, l'une de base, l'autre avancée, un suivi sérieux par l'équipe enseignante, une prise en compte du travail dans l'évaluation des étudiants, un tutorat...) rencontre une bonne adhésion des étudiants et a des effets positifs mesurables sur leurs compétences quotidiennes, par exemple en calcul ou sur des tâches routinières et techniques. Toutefois, comme souvent, il reste difficile d'en étudier l'impact direct sur les résultats aux épreuves finales d'examen, qui testent en particulier d'autres types de compétences.

Online Bridging Courses

Les « *bridging courses* » (enseignements de transition, originellement développés aux États-Unis) sont des enseignements qui sont spécifiquement dédiés à la prise en charge des difficultés de la transition secondaire-supérieur. Selon les institutions, ils peuvent être offerts pendant l'été précédant l'entrée à l'université, ou au début des études universitaires. Ils peuvent également être proposés de manière obligatoire à certains étudiants repérés comme étant en difficulté, ou être présentés comme un soutien que l'étudiant est libre d'utiliser ou non. Ces *bridging courses* reprennent des contenus rencontrés au secondaire, mais en demandant aux étudiants plus de prise d'initiative dans leur activité mathématique. Certains de ces cours utilisent des ressources en ligne, avec différentes formules allant de l'apprentissage à distance à des enseignements dont une part importante est en présence. Biehler, Fischer, Hochmut et Wassong (2011) présentent un tel cours en ligne, utilisé des différentes manières en début de première année en Allemagne. Concernant le contenu, il s'agit d'un cours relativement classique de type « remise à niveau ». Le recours aux outils numériques permet de débiter chaque chapitre par un diagnostic initial : l'étudiant effectue un positionnement, sous forme d'une liste d'exercices interactifs, il reçoit une note. Dans les parties de cours et d'exercices, des outils de visualisation dynamique sont proposés, ainsi que des exercices interactifs. Le chapitre se termine par un diagnostic final, comportant une liste d'exercices du même type que ceux qui étaient proposés dans le diagnostic initial. Ce cours en ligne est par exemple utilisé dans un enseignement de 4 semaines en début d'année (Université de Paderborn), sous deux formes. Dans la forme « présente », il y a trois jours par semaine de cours traditionnel à l'université, suivis de deux jours de travail personnel utilisant le cours en ligne. Dans la forme « distante », durant les 4 semaines il n'y a que 6 jours de travail en présence (2 jours introductifs, puis chaque vendredi un cours le matin, et l'après-midi un TD permettant de revenir sur le travail fait à distance), le reste étant dédié à du travail personnel sur le cours en ligne. La mise en regard des résultats aux diagnostics initiaux et finaux des étudiants ayant choisi l'une ou l'autre modalité montrent que les impacts des deux types de cours sont sensiblement les mêmes : le fait de travailler à distance n'a pas de conséquence négative sur les apprentissages.

Classe inversée (Inverted classroom ou Flipped classroom)

Des expériences d'enseignements suivant des principes de « classe inversée » ont été menées dans différents pays et ont donné lieu à de nombreuses publications récentes (par exemple Love, Hodge, Grandgenett, Swift 2013 ; Yong, Levy, & Lape 2015 ; Fredriksen, Hadjerrouit, Monaghan, & Rensaa

¹⁵ http://www.cfem.asso.fr/actualites/Wims_Journee_transition.pdf

2017). Contrairement aux dispositifs précédents, ces classes inversées ne sont pas spécifiquement conçues pour soutenir la transition ; elles peuvent fonctionner selon diverses modalités, mais ces modalités ne dépendent pas de l'année d'études concernée. Fredriksen, Hadjerrouit, Monaghan et Rensaa (2017) ont proposé et étudié un enseignement sous forme de classe inversée à un groupe (20 étudiants) de première année en Norvège. Chaque semaine, les étudiants disposent de 3 ou 4 vidéos d'une dizaine de minutes. Ils doivent regarder ces vidéos par eux-mêmes ; cependant les vidéos sont suivies d'un quizz de compréhension immédiate, et ils peuvent aussi envoyer des questions à un professeur. Ensuite il y a en classe 2 à 3 sessions d'une heure trente consacrées à la résolution collective de problèmes. Les chercheurs ont relevé des difficultés liées à cette organisation. La plus importante concerne le travail en autonomie avec les vidéos. Il semble que les étudiants se soient très inégalement investis dans ce travail (il s'agit, rappelons-le, d'un enseignement expérimental, regarder seul des vidéos ne fait pas partie du contrat habituel). En conséquence, le travail collectif en présence est bloqué par les connaissances très inégales selon les étudiants : certains n'ont pas acquis au moment de la séance en présence le vocabulaire élémentaire introduit dans les vidéos. Par ailleurs, certains étudiants déclarent aussi qu'ils préfèrent travailler seuls pour la résolution de problèmes. Il semble cependant que l'idée de disposer de vidéos comme ressources soit perçue positivement par les étudiants. Mais il s'agirait bien d'un complément au cours traditionnel, et non de remplacer celui-ci.

Dans Love *et al.* (2013), on trouve une étude impliquant 55 étudiants dans deux sections d'un cours d'algèbre linéaire, l'une des sections en cours traditionnel et l'autre section en classe inversée. Les étudiants en classe inversée ont particulièrement apprécié le format de cours en classe inversée. Selon les auteurs, les performances aux évaluations des étudiants du dispositif classe inversée se sont améliorées au fur et à mesure de l'expérience et des chapitres étudiés. Mais ils ont eu les mêmes performances aux examens finaux que les étudiants de la classe traditionnelle.

Ces expériences ont lieu aussi en France et dépassent bien sûr le cadre des mathématiques¹⁶. Les recherches sur l'impact de ces enseignements ne mettent pas en évidence des améliorations de la réussite des étudiants. Par exemple, Bridoux (2018) présente une expérience qu'elle qualifie d'assez négative de la classe inversée au début de l'université. Il s'agit cependant que d'une expérience isolée, d'une seule séance avec 31 étudiants, opérée en classe inversée, qui n'a pas été pensée en termes de recherche (qui porte sur l'apprentissage de la notion de limite de suite). L'auteure compare notamment le cours traditionnel tel qu'elle l'aurait géré et une capsule proposée aux étudiants. Elle identifie que le matériel proposé ne rencontre pas ses objectifs pédagogiques d'enseignante notamment en terme de rigueur attendue dans des justifications. Elle étudie l'activité des élèves (et notamment leurs questions) pendant la séance qui suit le visionnage de la capsule. Les questions ne portent pas du tout sur la capsule de cours mais sur la partie exercices. Mais elles relèvent d'incompréhensions de la partie cours, que les étudiants n'ont pas directement relevées, ce qui oblige l'enseignante gérant la séance après le visionnage à « rétropédaler » pour représenter les notions mathématiques en jeu dans un ordre qui n'est pas du tout celui didactiquement le mieux adapté. Enfin elle compare les résultats de ces 31 étudiants à un questionnaire qui a aussi été posé l'année d'après avec les étudiants ayant suivi le même cours mais dans le format traditionnel. Elle conclut finalement que la séance inversée génère plus de difficultés mathématiques chez les

¹⁶ voir la présentation de Virey à la journée IHP du 21 mars 2018 : http://www.cfem.asso.fr/actualites/Virey_Journee_Transition.pdf

étudiants que la séance traditionnelle (dû au faible temps consacré par les étudiants à la capsule mais aussi à la pauvreté mathématique de la capsule) mais qu'elle peut donner l'illusion aux étudiants qu'ils ont atteint les objectifs mathématiques fixés.

Le rôle de l'enseignant reste primordial, même dans le contexte de la classe inversée et ce, quel que soit le niveau d'enseignement. Ainsi, le témoignage d'un enseignant de collège ayant l'habitude de travailler en classe inversée donné dans Allard *et al.* (2016) semble d'ailleurs aller dans ce sens puisqu'il dit consacrer un certain temps (15 jours) à expliquer à ses élèves comment visionner les capsules et un document explicatif est aussi à leur disposition.

Outils interactifs pour les enseignements en amphithéâtre (Clickers)

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, durant les cours magistraux en amphi, ce que les étudiants comprennent est parfois assez éloigné des contenus visés par l'enseignant. Ainsi, l'emploi de certains outils interactifs permettant de tester la compréhension en direct peut être utile. Différentes expériences ont été menées à ce sujet en France et à l'étranger. Ainsi Leydecker (2017) a testé différents systèmes de votes devant des amphis de 300 étudiants et plus en Allemagne. Il propose des exercices (simples), laisse aux étudiants un temps de recherche ; il recueille un minimum de 220 réponses (envoyées via un téléphone portable ou une tablette) puis rédige la solution ou envoie un étudiant le faire. Une enquête menée après la mise en place de ce dispositif a montré une grande satisfaction des étudiants (plus de 90 % souhaiteraient qu'il y ait plus de telles questions interactives) ; la recherche n'a pas encore en revanche examiné l'impact de ces dispositifs en termes d'apprentissage.

En France, des expérimentations ont été menées dans le cadre d'un projet de recherche Idex EVALAC (EVALuer pour ACcompagner) de l'université Sorbonne Paris Cité et qui ne concerne pas que les mathématiques mais les sciences expérimentales également. À la faveur de ce projet, les chercheurs cherchent à la fois à intégrer à leurs pratiques d'enseignement des boîtiers de vote interactifs (aussi appelés télévotants) et à évaluer l'impact de l'usage de ces boîtiers non seulement sur les pratiques d'étude et la motivation étudiantes, mais également sur les pratiques enseignantes. Ils montrent que l'usage des boîtiers ne bouleverse pas ces pratiques mais en constitue un bon révélateur (mettant du relief sur des tendances caractéristiques des enseignants). Du côté des étudiants, il semble que les questions types « miroirs » – l'enseignant pose deux fois la même question sans donner le résultat à la première consultation mais en proposant une explication ou un complément d'explication entre les deux questions – semblent favoriser leur engagement dans la construction des connaissances, ce qui va dans le sens des résultats de la littérature sur ces nouveaux outils numériques.

4. Expérimentations à large échelle

Des enseignements expérimentaux concernant une année complète (voire deux années) d'enseignement ont été menés dans différents pays (Niss, 2001 ; CIIU, 1990 ; Robert, 1985 ; Pham, 2003). Il est à noter qu'en France, de telles expérimentations à large échelle n'ont pas été organisées depuis la réforme LMD (pour Licence Master Doctorat). La structuration en unités d'enseignement (UE) semble avoir mis à mal les possibilités d'expérimentations à l'échelle des mathématiques enseignées sur toute une année (certaines expérimentations concernaient même les mathématiques et les sciences physiques).

Entre 1973 et le début des années 2000, il n'y avait pas une Licence en trois ans, mais deux années débouchant sur un diplôme nommé Diplôme d'Études Universitaires Générales (DEUG), suivi d'une troisième année nommée Licence. Dans les années 80, une section expérimentale de DEUG avait été mise en place dans les universités Paris 6 et Paris 7. Le constat initial était déjà celui que l'on peut faire à l'heure actuelle, des difficultés des étudiants à l'entrée à l'université, et de trop modestes connaissances des étudiants arrivant en deuxième année alors qu'ils avaient réussi la première année. Cela correspondait véritablement à un dispositif à grande échelle, toujours avec des cours et des TD traditionnels mais dans une forme plus innovante. Par exemple, le cours magistral était proposé en réunissant deux groupes de TD uniquement et dans des salles, non pas en grand amphithéâtre. Des permanences hebdomadaires de l'équipe enseignante au moment du déjeuner étaient proposées – même si au final elles n'ont pas vraiment été investies par les étudiants sauf à l'approche des examens. Les étudiants n'étaient pas intéressés par ce dispositif de permanence au quotidien. Ils préféraient notamment questionner leurs assistants de TD pendant ou après les plages de TD. Des tests d'entrée avaient aussi été proposés avec un entretien de chaque étudiant à l'issue des tests pour discuter de leurs erreurs. Tout cela représentait un fort investissement des enseignants.

Du point de vue didactique, l'équipe enseignante avait aussi redéfini ce qu'elle attendait en terme d'apprentissage des mathématiques au début de l'université, notamment savoir résoudre des problèmes, à la fois dans certaines phases de découverte de nouveaux concepts comme en applications de connaissances anciennes au sein de cycles du type « actions (éventuellement en petits groupes) – institutionnalisations – renforcements ». Un certain nombre de séquences ont été construites à cet effet à cette époque, en analyse, en algèbre linéaire, suivant cette organisation. La coordination « action-institutionnalisation » se révélait délicate quand ce n'était pas le même enseignant qui faisait le TD et le cours. Ce projet impliquait aussi les enseignements de physique selon les mêmes principes didactiques de base, des discussions sur l'uniformisation des pratiques ou des notations (les notations différentielles par exemple) et encore des essais de coordination sur l'ordre d'introduction des concepts mathématiques et physiques correspondants. Au final cette section a fonctionné plusieurs années, tenue par une équipe soudée et stable d'enseignants motivés, avec des étudiants qui décrochaient moins que dans les sections classiques. La réussite en termes de note était similaire aux autres sections témoins mais cette correspondance ne voulait pas dire grand-chose étant donné que les expérimentateurs étaient aussi les évaluateurs des étudiants. Enfin, cette section expérimentale n'a pas survécu aux réformes successives de l'université et surtout à des restrictions budgétaires qui ne permettaient plus de la faire tourner avec de telles forces d'enseignement (Robert, 1985).

Plus récemment mais encore dans une période lointaine, on peut mentionner l'expérimentation du DEUG SPAD (semi-présentiel à distance) à partir de 2002 à Paris 6. Il s'agit d'un dispositif de DEUG pour 40 étudiants volontaires de première année MIAS (Mathématiques Informatiques et Applications aux Sciences). Il se voulait d'abord à une réponse à des problèmes d'étudiants et d'enseignants : demande d'un enseignement plus souple pour des étudiants désireux d'une plus grande flexibilité dans le temps et dans l'espace, intérêt d'étudiants pour l'utilisation des TICE, lutte contre la démotivation des étudiants, voire des enseignants, volonté de mieux mettre les étudiants « au travail » et de mieux les accompagner dans ce travail en ne favorisant pas les discours magistraux, favoriser une diversité des exercices et lutter contre les connaissances morcelées et uniquement techniques, créer du lien entre le travail à l'université en TD et l'environnement

personnel chez les étudiants... L'emploi du temps du DEUG SPAD était regroupé sur 3 jours par semaine, uniquement en petit groupe, avec une partie de l'enseignement des mathématiques et de l'informatique délégué à distance avec une plateforme d'enseignement et les ressources de l'Université en Ligne (UeL), devenues depuis Unisciel¹⁷ Sur Université en Ligne, les étudiants trouvaient des cours (avec des liens, des coups de pouce...), des exercices avec analyse de réponses, des exercices d'auto-évaluation, des simulations... Cette expérimentation a été menée en parallèle d'une recherche pour en étudier l'impact (Cazes *et al.*, 2001 et Cazes *et al.*, 2003), recherche modeste avec des résultats très partiels. Ces résultats ont donné à voir le peu de volontaires à l'inscription, avec des étudiants qui se sont inscrits pour deux raisons principales : ils habitaient loin de Paris ou ils voulaient avoir des supports de cours, fournis par Université en Ligne. Ces étudiants ont été satisfaits du dispositif et ont eu une réussite légèrement meilleure à l'examen de MIAS qui restait le même pour tous. Il y a eu toutefois autant d'absentéisme et d'abandon que dans la section traditionnelle, laissant penser que le problème de la motivation et de l'orientation des étudiants au début de l'université dépasse le cadre d'une expérimentation de cette sorte. Cette expérimentation a permis également d'étudier finement l'activité mathématique des étudiants sur les ressources en ligne proposées, donnant à voir les différences avec l'activité dans un environnement traditionnel. On note par exemple une meilleure implication dans les exercices qu'en TD traditionnels, davantage d'activité – mais pas toujours efficace - et plus d'interactions. Le rythme et l'itinéraire de travail étaient mieux respectés, avec des aides plus individualisées. Cependant les activités d'autocorrections et les lectures autonomes de solutions d'exercices, nettement plus présentes que dans un enseignement traditionnel, soulevaient des difficultés. On notait en outre l'importance pour les étudiants d'avoir au final des supports papier, notamment en période de révision et comme trace effective du travail accompli. Enfin, notons que l'équipe pédagogique a dû être élargie, avec notamment des assistants et des tuteurs, ce qui a finalement engendré des coûts supplémentaires. Le dispositif a été reconduit quelques années, avec des adaptations (par exemple la mise en place de « feuilles de route » pour aider les étudiants pendant les séances) et des retours sur les contenus de l'UeL (développement de certains types d'exercices par exemple). La mise en place du LMD en 2004 a ensuite eu raison de l'existence du dispositif qui s'avérait trop complexe à intégrer dans les contraintes imposées, en particulier la structure modulaire avec des mutualisations ne permettaient plus une présence réduite des étudiants à l'université (sur des jours regroupés).

5. Dispositif d'échanges entre enseignants

En France à l'université de Bordeaux, depuis 2013, s'est mis en place un dispositif d'échanges entre enseignants du secondaire et enseignants-chercheurs de l'université, au-delà des mathématiques, dans plusieurs disciplines. Les premiers assurent des TD à l'université tandis que les chercheurs font des interventions dans les lycées, comptées dans leurs services d'enseignement universitaires. En mathématiques et en informatique, cela concerne entre 60 h et 90 h d'échange par an, avec 4 enseignants du secondaire, 7 lycées concernés, et jusqu'à 8 universitaires. Un premier bilan est dressé dans l'intervention de Bruneau¹⁸ à la journée IHP du 21 mars 2018.

¹⁷ <https://www.faq2sciences.fr/>

¹⁸ http://www.cfem.asso.fr/actualites/VBruneau_Journee_Transition.pdf

D. Formation des enseignants du supérieur

Actuellement, la formation initiale des enseignants du supérieur n'est pas généralisée internationalement ; cependant dans certains pays comme l'Angleterre ou le Danemark des universités l'exigent de leurs enseignants débutants. (Biehler, Jaworski, Rønning, Wawro & Winsløw, 2018). En revanche, certaines universités prennent des initiatives d'offre de formation. Cette offre est le plus souvent transversale : elle ne concerne pas une discipline particulière, mais des pratiques pédagogiques comme l'utilisation du numérique, la motivation des étudiants, l'évaluation etc. Le plus souvent ces apports se font sous forme de conférences magistrales, ce qui ne semble pas une modalité très efficace en termes d'impact sur les pratiques des professeurs. Dans certaines universités cependant, la formation a été organisée sous forme d'ateliers qui permettent aux enseignants (débutants ou non) d'étudier des questions professionnelles qu'ils se posent. Ces questions donnent lieu à des expériences d'enseignement, puis à des analyses de pratiques : l'impact de la formation est alors plus important. En revanche, les moyens nécessaires augmentent. Dans quelques rares endroits, la formation est spécifique pour les enseignants de mathématiques. C'est le cas notamment des formations offertes par le Centre MatRIC¹⁹ en Norvège. Ce centre invite régulièrement des chercheurs en didactique, venant de différents pays, pour proposer aux enseignants de mathématiques de l'université un travail sur des thèmes spécifiques de leur enseignement en appui sur les résultats de la recherche.

Aux États-Unis, le projet Next²⁰ organisé au niveau fédéral par la *Mathematical Association of America* (MAA) vise la formation des jeunes enseignants (*Next* signifie *New Experiences in Teaching*). Il existe depuis 1994 et a contribué à la formation d'environ 1 700 enseignants. Le programme Next propose aux enseignants inscrits une formation étalée sur une année, débutant par trois jours d'ateliers spécifiques, avant la conférence annuelle de la MAA en août (*nommée Mathfest*). Ensuite chaque enseignant inscrit a un tuteur avec lequel/laquelle il/elle peut échanger. En janvier, de nouveaux ateliers sont proposés, sur des thèmes comme *des approches innovantes pour l'enseignement de...* (sujets mathématiques variés), *stratégies pour motiver les étudiants pour l'apprentissage de...* (sujets mathématiques variés). Finalement en août, un nouveau rassemblement a lieu au *Mathfest*. Les inscrits reçoivent alors un certificat de suivi de la formation, et peuvent devenir tuteurs pour de jeunes collègues si ils/elles le souhaitent. L'organisation au niveau fédéral permet de rassembler suffisamment d'enseignants-chercheurs en mathématiques pour faire une formation spécialement dédiée aux mathématiques. Certaines universités se sont engagées à financer pour tous leurs jeunes enseignants qui le souhaitent la participation au projet Next. Rappelons que celui-ci est organisé par une association et non par une institution officielle, la demande de formation des enseignants provient des universités qui le souhaitent, et non de l'institution.

Certaines recherches (par exemple Jaworski & Matthews, 2011) montrent l'intérêt d'un séminaire rassemblant des mathématiciens et des didacticiens des mathématiques autour de questions d'enseignement. Les enseignants-chercheurs échangent très régulièrement sur leurs recherches, mais très peu sur leurs pratiques d'enseignement, et ce type de séminaire permet de rompre cet isolement.

¹⁹ <https://www.uia.no/en/centres-and-networks/matric/what-is-matric>

²⁰ <https://www.maa.org/programs-and-communities/professional-development/project-next>

En Nouvelle-Zélande et au Canada (Barton, Clark & Sherin, 2010 ; Corriveau 2015), des groupes de ce type ont été organisés, avec la particularité de rassembler des enseignants de l'université et des enseignants de lycée. Ils ont permis pour les participants de progresser vers une perspective commune sur l'enseignement des mathématiques, et donc vers un rapprochement des cultures institutionnelles (voir partie 1). Par exemple Corriveau (2015) détaille un dispositif de rapprochement des enseignants du secondaire et du supérieur. Un groupe de 6 enseignants (3 du secondaire et 3 du supérieur) ont travaillé sur un même projet collaboratif sur les « manières de faire des mathématiques » en partant d'un thème mathématique précis : les fonctions. 6 réunions de travail de 7 heures chacune ont été portées sur des activités habituelles des enseignants en lien avec les fonctions, à partir là encore d'exercices précis qui ont été discutés.

En France, les IREM (voir p.21), au sein desquels peuvent collaborer des enseignants universitaires et des enseignants du secondaire permettent des échanges de ce type depuis de nombreuses années ; cette expérience pourrait être étendue.

ANNEXE : Contenus mathématiques et transition secondaire-supérieur

Dans cette annexe nous considérons trois thèmes mathématiques : l'analyse, pour laquelle nous détaillons le cas des nombres réels, des fonctions, des suites numériques, puis celui plus général du discret et continu ; l'algèbre linéaire ; et finalement la logique. Du point de vue de la transition secondaire-supérieur, ces trois contenus nous permettent d'illustrer des phénomènes différents : en effet, l'analyse est largement enseignée dans le secondaire, mais la façon de l'aborder change au supérieur. L'algèbre linéaire quant à elle n'est pas pratiquée dans le secondaire, elle constitue un thème particulièrement abstrait qui pose problème à de nombreux étudiants. La logique traverse quant à elle l'enseignement des mathématiques dès le collège, voire dès le primaire, mais de façon plus ou moins explicitée et formalisée, ce qui est aussi un facteur de difficultés pour les étudiants dès le début de l'université.

A. L'analyse

Dans de nombreux pays, l'analyse est enseignée au secondaire comme au supérieur. Ainsi les questions de transition portant sur ce contenu ont donné lieu à de nombreuses études (Artigue, Batanero & Kent, 2007). En particulier, les premières études sur l'enseignement supérieur ont porté sur les notions d'analyse, par exemple sur les notions de limite et continuité (Tall et Vinner, 1981) ou celle d'infini (Sierpiska, 1985).

Depuis, en France comme à l'international, de nombreuses thèses ou articles ont apportés des éclairages complémentaires, et ce thème continue d'être investigué par de nombreux chercheurs, notamment pour travailler la transition secondaire-supérieur dont il est l'un des supports mathématiques centraux. Il y a toujours une sensibilité à l'international au travail de formalisation des notions de limite et de continuité, nécessaire au début de l'enseignement supérieur. On trouve aussi des travaux autour des nombres réels dont nous reprenons certains ici dans le paragraphe 1 et des travaux plus novateurs mettant en jeu les technologies dans l'enseignement de l'analyse à l'université mais qui ne font pas nécessairement le focus sur les aspects transitionnels²¹. Nous ne pouvons pas prétendre à l'exhaustivité. Nous faisons certains zooms sur certaines recherches en mettant en relief ce qui nous semble important pour la transition en France et en prenant comme entrée les concepts fondateurs de l'analyse : les nombres réels, les fonctions, les suites. Une quatrième partie plus transversale fait un focus sur la dialectique discret-continu qui traverse l'enseignement de l'analyse.

1. Les nombres réels

On a déjà parlé plus haut le travail de Bergé (2016) sur la borne supérieure. Durand-Guerrier et Vivier (2016) étudient les relations entre l'appropriation du continu par les étudiants - en particulier la complétude de \mathbb{R} , la densité de \mathbb{Q} et \mathbb{D} - et leurs difficultés dans l'appropriation des premiers concepts d'analyse réelle enseignés à l'université, en mettant en synergie des aspects mathématiques, épistémologiques, cognitifs et didactiques. Ils relient les difficultés d'appropriation des nombres réels

²¹ Voir les actes de INDRUM 2016 : <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/public/indrum2016proceedings.pdf> dans le TWG 1 consacré à l'analyse.

à la question et au jeu entre l'infini actuel et l'infini potentiel²², qui posent de nombreuses questions philosophiques (par exemple Monnoyeur, 1992). Ils notent d'abord que l'enseignement secondaire ne propose plus de travail substantiel sur la construction des nombres, notamment depuis les programmes de 2009 qui ne font plus référence explicitement aux ensembles de nombres. Une revue des index des ouvrages de classe de première scientifique montre que le mot « nombre » n'apparaît qu'avec « nombre dérivé » et qu'en terminale scientifique, il apparaît avec « nombre dérivé », « nombres entiers naturels », « nombres entiers relatifs », « nombres complexes ». Les différents types de nombres sont rappelés en seconde – mais jamais vus au collège, même à l'occasion de l'introduction de la racine carrée – sans qu'aucune définition des différents types de nombres ne soit donnée. Dans un manuel de seconde, on peut trouver « l'ensemble de tous les nombres que nous utilisons s'appelle l'ensemble des nombres réels » (MATH 2^{nde}, Nathan 2010, figure 3) ou encore « l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des nombres réels » (HYPERBOLE 2^{nde}, Nathan 2009, figure 4).

Figure 3 . Définition des réels dans Maths Seconde, Nathan (2010) p. 8

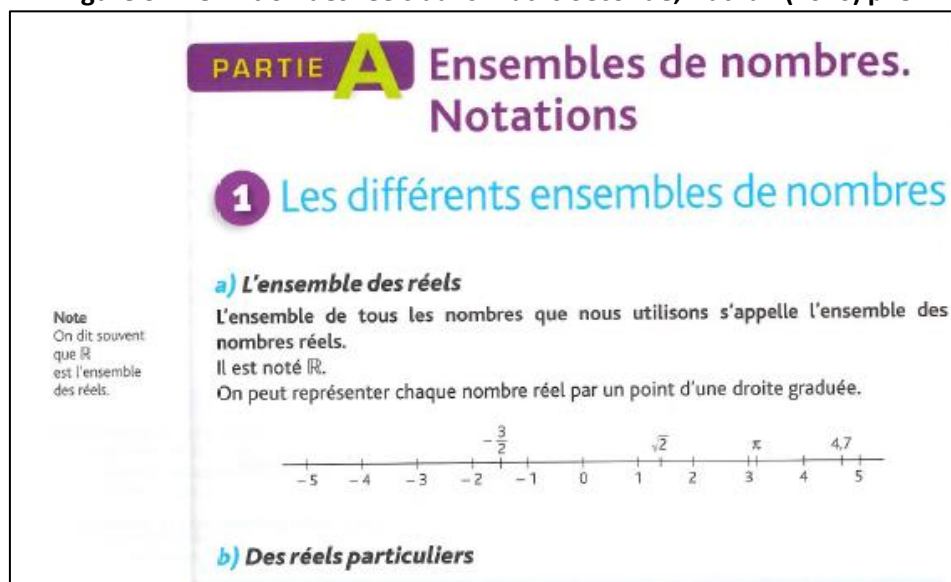


Figure 4. Définition des réels dans le manuel Hyperbole Seconde (2009) p. 32

1 Ensemble \mathbb{R} et intervalles

Note
L'ensemble des nombres entiers naturels (positifs) est noté \mathbb{N} .
L'ensemble des nombres entiers relatifs (positifs ou négatifs) est noté \mathbb{Z} .

Note
 $[a; b[$: en b , le crochet est ouvert c'est-à-dire dirigé vers l'extérieur. Cela signifie que b n'est pas dans l'intervalle.

L'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée est appelé l'ensemble des **nombres réels**. On note \mathbb{R} l'ensemble de tous ces nombres. Certaines parties de \mathbb{R} sont appelées des **intervalles**; on les note en utilisant des crochets.

Ensemble des réels x tels que :	Représentation	Intervalle
$x < b$		$] -\infty ; b [$
$x \geq a$		$[a ; +\infty [$
$a \leq x \leq b$		$[a ; b]$
$a < x < b$		$] a ; b [$
$a \leq x < b$		$[a ; b [$

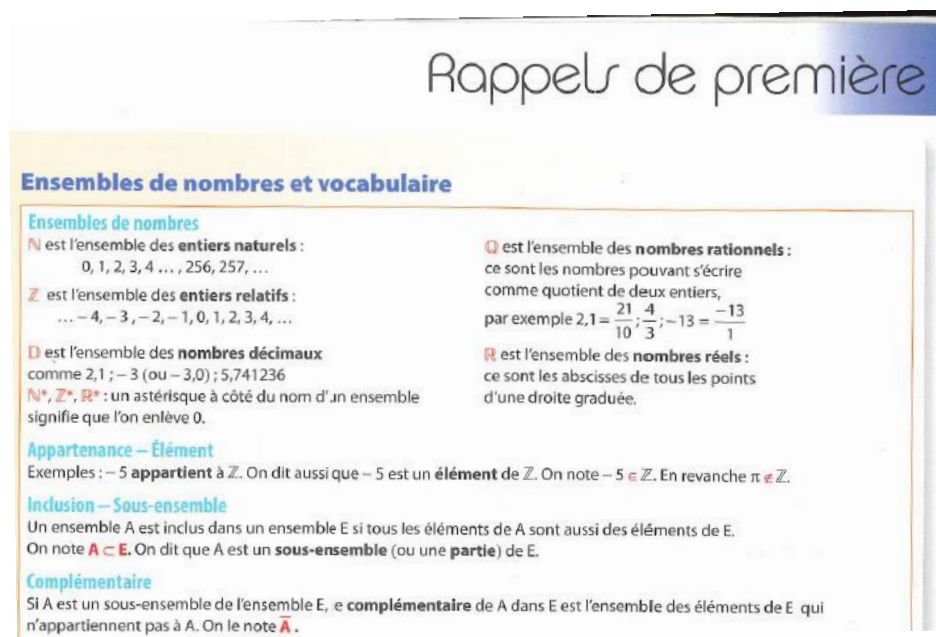
On définit de la même façon les intervalles $]a; b]$, $]a; +\infty[$ et $] -\infty; b]$.

Attention! $-\infty$ et $+\infty$ ne désignent pas des nombres réels; du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert. Par exemple, on note: $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

²² L'infini actuel désigne l'infini pris d'un seul tenant comme par exemple quand on considère l'ensemble infini des entiers \mathbb{N} alors que l'infini potentiel est issu d'une construction progressive : on prend un entier puis son successeur.

En terminale les définitions ne sont guère plus précises, avec par exemple : « \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée » (MATH'x TS, Didier 2012, figure 5) ou bien « \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire des nombres rationnels et des nombres irrationnels » (HYPERBOLE TS, Nathan 2012). Cela amène les étudiants au début de l'université avec des connaissances relativement fragiles de ce point de vue-là, ne correspondant pas à la vision des enseignants du supérieur à leur niveau pour entrer dans l'analyse réelle (Vivier, 2015 ; Vergnac & Durand-Guerrier, 2014).

Figure 5. Définition des nombres réels, Math'x Terminale S (2012), Didier, p.471



2. Fonctions à la transition lycée-université

Les fonctions sont des objets mathématiques complexes et leur compréhension par les élèves est loin d'être achevée à la fin du secondaire. Elles sont préparées dès le début du collège et sont formalisées à la fin du collège – contrairement aux suites numériques qui ne sont formalisées qu'en classe de première. Mais elles ne sont essentiellement travaillées au collège que sous leurs aspects ponctuels (tableaux de valeurs, images, antécédents). Il s'agit surtout d'introduire le formalisme global associé au nouvel objet, unifiant les différents programmes – processus – de calculs déjà rencontrés pour eux-mêmes auparavant (linéaires, affines, autres...) ainsi que le travail déjà réalisé sur des graphiques dès la sixième et dans d'autres disciplines (allure des courbes, lien avec les équations et les intersections de droites ou de courbes dans des repères). C'est l'aspect dépendance [x donne f(x)] qui est essentiellement travaillé, dans des registres complémentaires : numérique, algébrique et graphique (Duval, 1996). Il y a une nécessité - pas toujours assumée dans les pratiques et les manuels - de commentaires méta mathématiques pour justifier ce qu'on gagne avec l'introduction de ce nouvel objet mathématique appelé f : on passe notamment d'une situation de proportionnalité entre grandeurs discrètes à une représentation graphique continue, mais souvent sans justifier ce que l'on gagne ou ce que cela cache. Par exemple on ne souligne pas le changement de statut du x dans une expression f(x) qui devient une variable alors que les élèves sont habitués à la rencontrer comme inconnue dans des équations.

Le travail s'enrichit ensuite considérablement au lycée, avec de nombreux enjeux, donnant à voir la complexité du concept, en lien avec les nombres réels, les suites, la logique, la démarche de preuve.... Cependant la pratique des nombres réels n'est sûrement pas suffisante pour soutenir le travail nécessaire sur les fonctions : cela induit des difficultés dans le passage formalisé de dépendance à covariation, avec appui sur le registre graphique, - le passage de la perspective ponctuelle à une perspective globale – la courbe est l'ensemble des couples $\{(x, f(x))\}$ – et surtout dans la nécessaire rupture discret / continu qui reste toujours masquée ou mystérieuse : la courbe est implicitement continue pour les élèves mais l'ensemble des $\{(x, f(x))\}$ renvoie à un agrégat de points juxtaposés. (Bridoux, Chappet-Pariès, Grenier-Boley, Hache et Robert, 2015).

L'herbier de fonctions de références s'agrandit également en seconde, avec apparition d'une nouvelle représentation sous forme d'un tableau de variations, qui « embarque » beaucoup de connaissances sur la fonction qu'il représente et présente déjà une certaine complexité (Coppé, Dorier et Yavuz, 2007). Les fonctions sont aussi fréquemment utilisées comme outils de modélisation, ce qui enrichit aussi le travail des élèves, par exemple avec des usages fréquents de logiciels de géométrie dynamique, du tableur ou de l'algorithmique. Mais le recourt à ces logiciels peut minorer les besoins théoriques des élèves, masquer le continu en construction ou le rabattre sur du discret, masquer aussi le besoin de la justification d'existence de valeurs particulières attachées à une fonction au motif que ces valeurs peuvent être visualisées, masquer le besoin de preuve et donc de formalisation minimum (Vandebrouck et Robert, 2017).

Cela oblige sans doute à maintenir et à articuler les usages des logiciels avec un certain travail formel, qui amorce ce qui est attendu au début du supérieur. Même si certains objets attachés à ce travail formel ne « servent » pas systématiquement dans l'enseignement du lycée, cela ne doit pas empêcher de les introduire, à titre de familiarisation. Un certain nombre de petites preuves déjà escamotées au collège gagneraient ainsi à être reprises ici et ne le sont que très rarement : que la représentation graphique $\{(x, f(x))\}$ des fonctions affines est une droite par exemple, voir figure 6 (sens direct et réciproque en mobilisant le théorème de Thalès).

Un certain nombre de concepts ou propriétés globales des fonctions ne sont peut-être pas non plus suffisamment travaillés au lycée pour ancrer l'idée de covariation, de continu et de global : domaine de définition, ensemble image, parité, périodicité, ou même signe d'une fonction sur un domaine par exemple. Les propriétés globales de variation sont bien travaillées mais souvent uniquement graphiquement (« ça se voit », mais on constate bien les limites de la visualisation, avec par exemple de nombreux élèves qui décrivent longtemps des variations aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche). Les définitions de la croissance sont peu travaillées algébriquement ou formellement, alors même qu'elles initient utilement aux doubles quantifications et à un usage de la relation d'ordre dans une implication. Des activités simples comme la justification de la variation d'une fonction affine, nécessitant majorations ou minorations, sont admises *via* les graphiques mais ne sont généralement plus proposées comme activité systématique de preuve pour les élèves (figures 6 et 7). On notera dans la figure 7 que la démonstration de la variation de la fonction affine est tout de même proposée en exercice). Ceci renforce l'idée que la visualisation seule peut suffire à cette justification et que la définition donnée dans le cours de la croissance n'est pas importante (alors que le cadre du programme permet réellement des justifications, car les équations et inéquations sont au programme en classe de seconde).

Figure 6. Symbole Seconde, Belin, (2010), p. 74

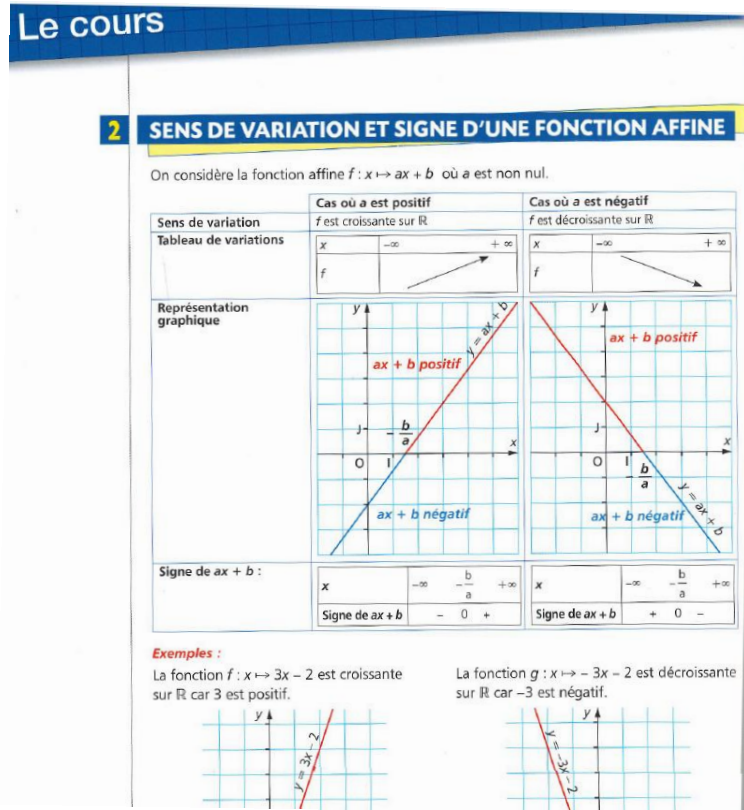
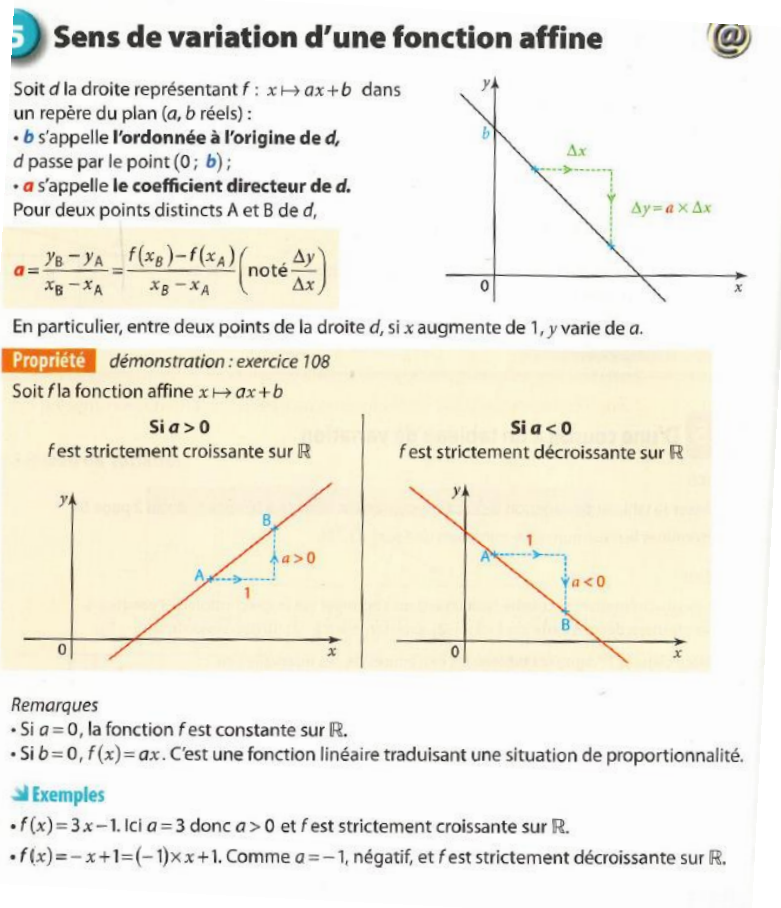


Figure 7. Math'x Seconde, Didier, (2010), p. 62



Si elles ne peuvent cependant qu'être amorcées en seconde, ces types d'activités embarquant nécessairement un peu de formalisme - et par la même le justifiant - gagneraient à être prolongées en première et terminale pour préparer l'enseignement supérieur (à l'instar de certaines preuves sur les limites attendues dans le domaine des suites numériques).

A partir de la classe de première, la richesse relative (potentielle) sur les fonctions en classe de seconde semble écrasée par une prédominance du registre algébrique qui devient le cœur du travail avec les fonctions (Vandebrouck, 2011 ; Kuzniak, Montoya, Vandebrouck & Vivier, 2015). Il n'y a pas non plus vraiment d'incursion dans le registre formel, ce que l'on voit au contraire avec les suites, pour lesquelles quelques preuves formelles sont apportées et travaillées avec les élèves. Les justifications formelles de variations de fonctions, évoquées au paragraphe précédent, dont on pense qu'elles sont importantes pour familiariser les élèves, sont supplantées par le calcul systématique des fonctions dérivées. Avec les fonctions, on perd aussi à l'approche du baccalauréat l'aspect outil des fonctions et un certain travail ponctuel et global sur les graphiques servant potentiellement d'appui à un travail algébrique ou formel (travail de conjectures graphiques avec des logiciels par exemple). Les fonctions sont presque toujours données par leur expression algébrique sur un domaine de définition qui n'est plus du tout questionné. Les graphiques sont donnés ou ont valeurs de « produit fini ». La dialectique ponctuelle / globale associée aux fonctions semble se perdre peu à peu et il ne reste progressivement avec l'algèbre que la seule idée de dépendance, assortie d'un travail essentiellement technique comme l'illustre la partie A du baccalauréat 2017 (figure 8).

Figure 8. Un travail technique sur les fonctions, Baccalauréat 2017.

⌘ Baccalauréat S Métropole ⌘
21 juin 2017

A. P. M. E. P.

EXERCICE 1 **7 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h .
 - a. Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a :

$$h(x) = e^{-x} - h'(x)$$
 où h' désigne la fonction dérivée de h .
 - b. Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
 - c. Dédire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Dans ce sujet de baccalauréat, il y a un travail graphique à fournir dans la partie B (figure 9). Le graphique est en appui sur un questionnement algébrique (calcul de minimum d'une fonction) avec un effet de rétroaction qui peut supporter le travail algébrique, ce qui peut ressembler à des pratiques attendues dès le début du supérieur (graphiques qui donnent des idées ou supportent le raisonnement). On pourra aussi consulter la présentation de Gardes et Durand-Guerrier à la journée IHP du 21 mars 2018 (www.cfem.asso.fr/actualites/AtelierFonctions_Journee_Transtion.pdf) où sont repris ces points de continuités et ruptures entre les attendus au baccalauréat et les attentes au début du supérieur, dans ce cas précis du travail sur les fonctions numériques.

Figure 9. Un travail dans le registre graphique, Baccalauréat 2017.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} + \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1).$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.
Ces deux courbes sont tracées en annexe page 8. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x ; f(x))$ et N le point de coordonnées $(x ; g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

- a. Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
- b. Placer sur le graphique fourni en annexe page 8 les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN .

La perspective locale (voisinages) est aussi introduite à partir de la classe de première, de façon épisodique, mais avec des trous et des incohérences dans l'arrivée des notions : introduction du nombre dérivé comme limite intuitive et notion de dérivabilité globale avant celle de continuité en première ; ou plus surprenant l'introduction en classe de Terminale ES seulement de la fonction exponentielle par un processus limite délicat en partant des suites géométriques (voir partie 1.4 sur discret-continu). Mais le travail demandé réellement aux élèves reste toujours uniquement algébrique, et c'est assumé dans des discours de certains enseignants qui disent aux élèves que le travail « local » n'est pas très important pour la suite (Derouet & al., 2016) : le socle de travail demandé portera sur des calculs de dérivées, d'équations de tangentes, de calculs de primitives ou de limites appliquant les règles générales sur des expressions algébriques. Cela questionne sur ce que l'on gagne vraiment à avoir fait ces incursions dans l'analyse locale (si ce n'est deux ou trois limites de formes indéterminées de référence qui s'interprètent comme des taux de variations, mais que les élèves connaissent par cœur et ne reconnaissent jamais comme tels).

La pratique algébrique même si elle est finalement au cœur de l'activité en terminale ne semble pourtant pas suffisamment approfondie par les élèves. La pratique de transformation des formes algébriques des fonctions pour lever les indéterminations n'est pas habituelle, au bénéfice de quelques règles techniques peu maîtrisées : limite des termes de plus haut degré, « l'exponentielle l'emporte ». Ces règles peuvent parfois même être remplacées par des critères qualitatifs permettant à certains élèves de deviner les limites par des comparaisons plus ou moins maîtrisées des « poids locaux » des différentes sous-fonctions apparaissant dans les formules algébriques. Plus

inquiétant, le calcul de primitives simples, voire le calcul de dérivées ne semblent pas non plus avoir été suffisamment routinisés par les élèves au lycée, d'après les enquêtes depuis les derniers programmes (enquête C12U, http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/bilan-enquete_reforme_lycee-c2iu-nov_2016.pdf).

Au début de l'université, les élèves n'ont donc pas assez de pratique algébrique autonome, avec les lacunes repérées aux paragraphes précédents, ce qui les handicape en cours et en séances de travaux dirigés où la complexité algébrique des fonctions manipulées augmente. La familiarisation au lycée avec le formalisme f - autrement que pour nommer une fonction - n'est pas suffisante pour étayer l'usage accru de ce formalisme à l'université, dans des exercices « génériques » portant sur des fonctions qui ne sont pas nécessairement explicitées algébriquement. L'usage accru des valeurs absolues à l'université fait apparaître un manque criant d'aptitude des élèves à les manipuler, découlant sûrement d'une disparition de la valeur absolue comme fonction de référence au lycée (sur 120 copies de L1, très peu mettent spontanément des valeurs absolues quand ils intègrent en \ln une fonction en $1/x$).

Il y a également une extension à de nouvelles fonctions et un langage ensembliste qui n'est pas préparé par une perte à la fin du lycée de la perspective globale sur les fonctions (pas de recherche d'ensemble de définition, d'ensemble image, de maniement de propriétés globales autrement qu'à travers le calcul algébrique). L'incursion dans le local est aussi sûrement trop artificielle pour soutenir le travail local qui s'initie véritablement à l'université (définition formalisée de la limite, de la continuité...). Enfin, le rapport au graphique est différent. Alors que les élèves ne considèrent au lycée que des courbes singulières, associées à une fonction donnée par une formule, ils doivent s'habituer au travail sur des courbes génériques, représentant des classes de fonctions (des exemples génériques), qui sont essentiellement des appuis pour faire des preuves formelles dès le début de l'université : théorème des valeurs intermédiaires, de Rolle, des accroissements finis...

3. Les suites numériques

En France dans le cadre des programmes actuels, les suites numériques sont rencontrées sous une forme formalisée en classe de première mais elles traversent les enseignements depuis le primaire, sous des formes informelles, dès qu'il s'agit d'opérer d'une façon ou d'une autre du dénombrement par exemple. C'est véritablement en classe de première que l'on s'intéresse aux suites numériques comme des objets mathématiques à part entière. Elles sont vues à travers différentes approches, numérique, formules, graphiques, dans le cadre aussi de l'algorithmique.

On s'intéresse aux variations des suites, on étudie des suites particulières – arithmétiques et géométriques essentiellement – puis on va jusqu'à s'intéresser de façon intuitive aux limites de suites. Il faut insister sur la différence fondamentale entre les définitions fonctionnelles de suite et les définitions par récurrence et sur les deux types de représentations graphiques associées (fonctionnelles ou en escargot). Cela rend les objets « suites » fondamentalement différents des objets « fonctions », notamment par le caractère discret de la variable n , ce qui n'est peut-être pas suffisamment travaillé avec les élèves et qui engendre des malentendus et des erreurs classiques au-delà du lycée. En terminale, on introduit le raisonnement par récurrence et on a une définition presque formalisée de convergence de suite qui est donnée (« on dit que $(U_n)_N$ tend vers L quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs U_n à partir d'un certain rang »). On caractérise également le fait qu'une suite $(U_n)_N$ tend vers $+\infty$.

A propos du raisonnement par récurrence, il faut souligner que de nombreux exercices en classe de terminale font appel à ce raisonnement, et même s'il s'avère que sa maîtrise par les élèves et les étudiants reste souvent plus qu'approximative – aucune vision claire de la structure logique du raisonnement - ce raisonnement reste un pilier des exercices sur les suites au début de l'université, assurant par là même une certaine continuité dans les types de questions posées aux élèves et aux étudiants.

Concernant la définition de limite de suite, il faut également souligner que cette définition est utilisée en classe de terminale pour plusieurs preuves inscrites au programme : en particulier, on se sert explicitement de cette définition pour démontrer que si une suite est croissante et admet L pour limite alors tous ses termes sont inférieurs ou égaux à L . On montre aussi qu'étant données deux suites $(U_n)_N$ et $(V_n)_N$, s'il existe un rang N tel que pour tout n supérieur à N , $U_n \leq V_n$, si $(U_n)_N$ tend vers $+\infty$ alors il est en de même de $(V_n)_N$. Il semble donc que le travail sur les suites numériques au lycée puisse être un bon support pour amorcer l'analyse au début de l'université, qui s'appuie fortement et rapidement sur la définition formalisée de limite. On ne peut pas en dire autant pour la notion de limite de fonction par exemple, qui ne sert à aucun moment, le point de vue sur la notion de fonction elle-même n'étant d'ailleurs pas en continuité entre la fin du lycée et au début de l'université (comme nous l'avons dit dans l'exemple des fonctions ci-dessus).

Toutefois, bien qu'introduite intuitivement, puis presque formellement et utilisée comme outil dans quelques preuves au lycée, la définition formelle de limite de suite reste d'une grande difficulté pour les étudiants (Bridoux, 2016 ; Chorlay, 2018). On peut sans nul doute s'appuyer sur cette définition donnée et manipulée au lycée. Mais cela suppose que les étudiants aient pu adopter, sinon cultiver un changement de point de vue sur les suites, qui est déjà porté par la définition de convergence du lycée, mais qui n'est pas suffisamment cultivée. Car au-delà des quelques preuves qui sont vues au lycée, la définition de limite est vite abandonnée au profit d'un travail de calcul algébrique de limites de suites. La perte d'un travail sur les nombres réels n'aide pas non plus à ce changement de point de vue. Il s'agit de passer d'une vision dynamique d'une suite convergente vers sa limite à une vision statique d'un voisinage autour de la valeur limite dans lequel tomberaient tous les termes de la suite (qu'importe leur ordre) au-delà d'un certain rang. De nombreuses ingénieries didactiques ont été développées pour initier et soutenir ce changement de point de vue chez les étudiants mais elles n'ont que peu diffusé dans l'institution dans la mesure où même à l'université, ce qui prévaut assez vite est la capacité des étudiants à déterminer des valeurs de limites de suites données de façon explicite. On peut aussi consulter la brochure collective C2IU (<http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/WN/IWN17001/IWN17001.pdf>) sur le thème des limites de suites et de fonctions avec de nombreux exemples d'ingénieries pour introduire les définitions formalisées auprès des étudiants.

On peut noter aussi que des changements de formulation, comme par exemple demander de « déterminer la nature d'une suite » à l'université, plutôt que de demander explicitement « déterminer si la suite converge » peuvent mettre des étudiants dans l'embarras. On retrouve ici un changement, apparemment anodin, qui renvoie au contrat didactique.

4. Le discret et le continu en analyse

Rousse (2018) questionne les interférences entre le discret et le continu dans les pratiques des élèves au lycée (sans investiguer « ce qu'il y a entre les deux » en particulier car le mot « dense » n'est jamais utilisé au lycée). Les deux notions ne sont pas définies de façon précise et stable, avec selon

les domaines, des définitions qui ne sont pas forcément congruentes. Elles ne peuvent pas faire l'objet d'un enseignement explicite. Elles ne sont que rarement mises en fonctionnement directement dans des exercices. Rousse travaille en premier lieu sur les difficultés des élèves au lycée. Elle note des confusions d'élèves en fin de secondaire entre les objets (processus, phénomènes...) discrets et ce qui relève du continu. Elle note que les confusions peuvent être entretenues par les pratiques ou par les manuels scolaires (figure 10).

Figure 10. Phare 3^e, Hachette, (2008), p. 133. La transition discret-continu non questionnée

34 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2.$$

1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

2) Dans un repère orthogonal d'unités 1 cm, représenter graphiquement la fonction f pour x compris entre -3 et 3.

J'ai relié à main levée les points placés.

Rousse a une vision assez large en considérant plusieurs domaines des mathématiques : les nombres entiers, décimaux, réels, les courbes, les suites et les fonctions, particulièrement l'interférence entre les deux sous domaines au niveau des fonctions exponentielles, les sommes et les intégrales mais aussi les probabilités discrètes et continues (figure 11).

Figure 11. Transmath TES, Nathan, (2012), p. 74 –

On notera la notion de ligne « continue et régulière »

Activité 1 D'UNE SUITE À UNE FONCTION

1 a) Vérifiez que les sept premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(1,2)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1; (1,2)^{-1})$, $(-2; (1,2)^{-2})$ et $(-3; (1,2)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (1,2)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(1,2)^{\frac{3}{2}}$ et de $(1,2)^{-1,5}$.

2 a) Vérifiez que les six premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(0,85)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $(-1; (0,85)^{-1})$, $(-2; (0,85)^{-2})$ et $(-3; (0,85)^{-3})$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur \mathbb{R} qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (0,85)^x$.

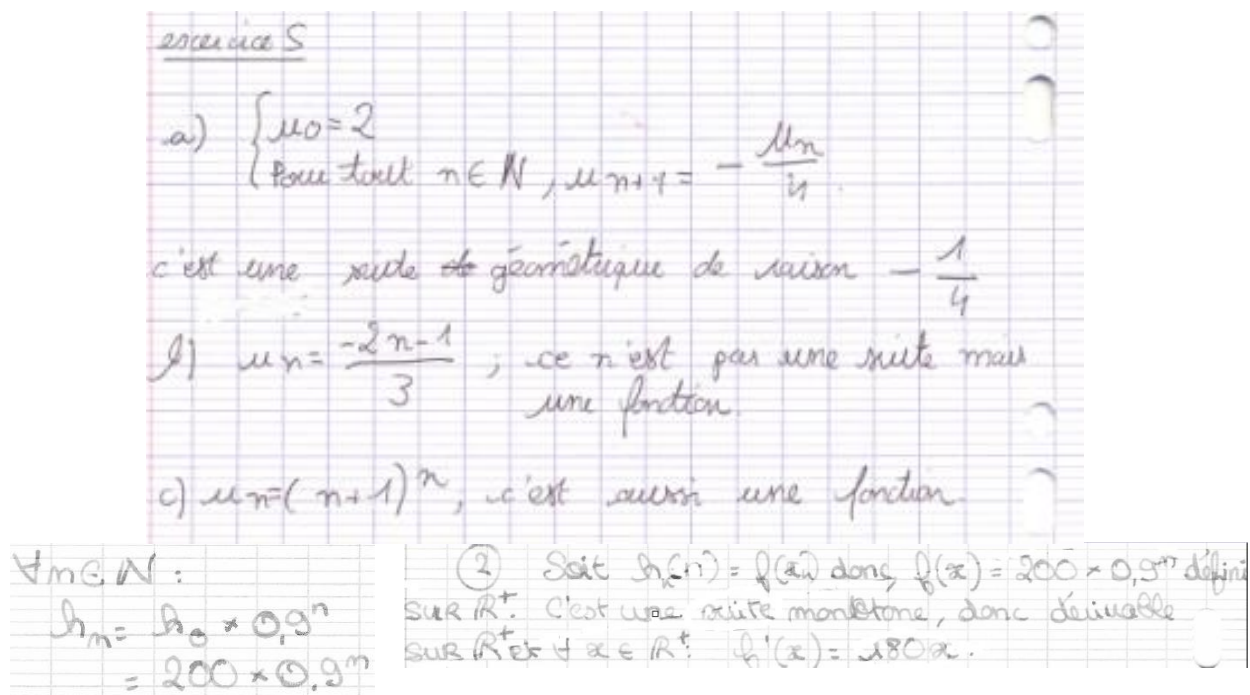
Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(0,85)^{\frac{3}{2}}$ et $(0,85)^{-2,5}$.

Les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$ s'obtiennent à partir des représentations graphiques des suites (q^n) .

Sur suites et fonctions, Rousse identifie aussi les différences / similitudes de traitement sur la notion de croissance. Le signe de $U_{n+1} - U_n$ définit la monotonie et la détermination du signe $U_{n+1} - U_n$ permet de déterminer la monotonie d'une suite ; tandis que c'est le signe de $f(x_2) - f(x_1)$ (*) pour deux valeurs distinctes x_1 et x_2 qui permet de définir celle d'une fonction sur un intervalle. Toutefois, dans le cas des suites, la condition « quelque soient n, p $n > p$ implique $U_n \geq U_p$ » est fréquemment utilisée mais

elle est considérée comme naturelle et n'est jamais démontrée. Du côté des fonctions, la définition (*) mettant en jeu deux quantificateurs universels est vite abandonnée au profit d'une caractérisation de positivité de $f'(x)$ qui ne met en jeu qu'un seul quantificateur (qui devient vite implicite, voire oublié). La propriété « si f est croissante alors la suite $f(n)$ est croissante » est énoncée, rarement démontrée et elle utilisée explicitement. La réciproque est en général fautive. Du côté des limites, la propriété de limite monotone d'une suite est énoncée, non démontrée, mais son analogue n'est pas énoncé pour les fonctions alors qu'il peut être utilisé dans les exercices. A l'inverse la condition $\lim f(x) = a$ quand x tend vers l'infini est utilisée pour impliquer que la limite de la suite $f(n)$ est aussi égale à a . La réciproque là encore est fautive. Cette juxtaposition de deux domaines avec des notions qui se rapprochent parfois ou qui sont très distinctes sous d'autres aspects, avec des propriétés admises ou démontrées selon les cas, sans qu'un travail explicite de mise en relation soit opéré par les enseignants (ou les manuels), tend à mener les élèves dans une grande confusion (figure 12).

Figure 12. Productions d'élèves de 1^{re} S mettant en évidence les confusions suites-fonctions



A l'université, les suites définies par récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ sont assez rapidement étudiées de façon systématique et les propriétés des suites sont mises en relation avec les propriétés des fonctions définissantes, ce qui fait ressortir massivement les confusions des étudiants car cette interférence suite-fonctions est justement passée sous silence au lycée - de telles suites y sont étudiées mais au coup par coup et sans attention sur la variable f . Les difficultés des élèves et des étudiants s'observent en fait jusque dans les formations d'enseignants où là encore elles sont souvent trop sous estimées par les enseignants du supérieur. Dans un questionnaire posé à un groupe d'étudiants en master MEEF préparant le CAPES, Rousse constate que tous les étudiants répondent correctement à la question « que peut-on dire d'une fonction qui vérifie quel que soit x $f(x+1)=f(x)$? » mais qu'une majorité d'entre eux, à la question « que peut-on dire d'une fonction qui vérifie quel que soit x $f(x+1) > f(x)$? », répond que la fonction est strictement croissante (ou croissante).

B. L'algèbre linéaire

L'algèbre linéaire est un contenu classiquement abordé en première année d'université, en France comme dans de nombreux pays, dans les filières mathématiques mais également dans de nombreuses filières de non-spécialistes : dans les études des futurs ingénieurs, mais également en économie par exemple.

Qu'il s'agisse d'étudiants de mathématiques ou de non-spécialistes, le constat est le même : cette rencontre avec l'algèbre linéaire soulève de très nombreuses difficultés. Ces difficultés peuvent être très diversement interprétées, et nous allons illustrer sur cet exemple les trois types d'interprétations évoquées ci-dessus : il s'agit d'un savoir très abstrait ; les pratiques visées s'approchent de celles des mathématiciens ; même lorsque certains contenus semblent proches de ce qui est vu dans le secondaire, la manière de les aborder change assez radicalement.

Pour les spécialistes, nous indiquons que nous considérons ici les contenus « élémentaires » d'algèbre linéaire : espace vectoriel, sous-espace, famille libre, famille génératrice, bases, dimension, applications linéaires, matrices et systèmes linéaires essentiellement.

1. Comment l'histoire des mathématiques éclaire la difficulté de l'algèbre linéaire élémentaire.

Un courant de recherche très actif s'est développé en France au sujet de l'algèbre linéaire à partir de la fin des années quatre-vingts. L'essentiel des travaux correspondants est présenté dans Dorier (1997a et 2000). Dans ces travaux, l'histoire des mathématiques montre comment se sont développés les contenus qui sont enseignés actuellement ; et l'analyse de cette genèse éclaire les difficultés des étudiants actuels.

Dorier (1997b) l'annonce dès le début de l'exposé de son analyse historique de la genèse de l'algèbre linéaire : « Le but de ce texte est d'essayer de dégager les étapes les plus importantes de cette évolution afin de nuancer la perfection un peu surfaite de l'algèbre linéaire. » (p.23). Il montre que cette genèse a été longue et complexe ; il en souligne certaines étapes, et met en évidence des points critiques. Nous rappelons brièvement ici certains de ces points, qui ont fondé des analyses didactiques ultérieures.

Dorier retrace un premier mouvement, qui s'étale du 18^e siècle à la deuxième moitié du 19^e, et qu'il identifie comme un mouvement d'unification. La résolution des équations linéaires et la manipulation de déterminants, tout d'abord réduites à des calculs techniques, évoluent vers une théorie plus générale qui met en évidence des caractéristiques du linéaire. Dans le même temps apparaît le calcul vectoriel, qui associe l'algébrique et le géométrique. L'évolution de la géométrie au cours de la première moitié du 19^e siècle (et en particulier l'apparition des géométries non-euclidiennes) permet de dépasser l'obstacle constitué par la limitation à la dimension 3. La géométrie s'élargissant à la dimension n , l'aspect analytique amène un rapprochement entre le champ de la géométrie et celui des équations. Le rapprochement de ces deux courants : équations linéaires, et calcul vectoriel, amène une unification des problèmes linéaires en dimension finie.

Cependant on est à ce moment encore loin de l'algèbre linéaire sous sa forme moderne de théorie axiomatique. C'est un second mouvement, initié à la fin du 19^e siècle, qui aboutira à cette forme moderne. Dans celui-ci, on observe d'une part des travaux dont l'objectif est explicitement de donner une forme axiomatique à la théorie, et d'autre part des recherches portant sur les problèmes

linéaires en dimension infinie, problèmes d'analyse fonctionnelle en particulier. La forme axiomatique s'impose finalement lorsqu'il apparaît qu'elle permet d'unifier des méthodes, des problématiques en dimension infinie, et également de généraliser les méthodes de la dimension finie à la dimension infinie, permettant ainsi en particulier un certain regard géométrique sur les espaces de fonctions, de suites etc.

Ainsi l'algèbre linéaire prend forme pour des raisons de réorganisation du savoir, plutôt que de résolution de problèmes : ce constat historique laisse présager des difficultés didactiques, en lien avec le concept de *statut* des notions mathématiques à enseigner (Robert, 1998 ; voir partie I.1. ci-dessus). En s'appuyant sur le travail de Dorier, Robert conclut ainsi que l'algèbre linéaire est une théorie *généralisatrice, unificatrice et porteuse d'un nouveau formalisme*.

Les chercheurs qui adoptent ce regard théorique (Dorier *et al.*, 1997) en algèbre linéaire se focalisent sur des difficultés d'étudiants qui relèvent de *l'obstacle du formalisme* : pour ces étudiants « l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux. » (p.116) Ces étudiants ne parviennent pas à donner des exemples d'espaces vectoriels ; interrogés sur ce en quoi consiste l'algèbre linéaire, ils citent des concepts mais aucune utilisation de ceux-ci. Ces difficultés sont alors interprétées comme résultant du caractère formel, généralisateur, unificateur de l'algèbre linéaire.

2. Des pratiques se rapprochant de celles de mathématiciens : nécessité de flexibilité

L'algèbre linéaire utilise différents types de représentations, différents registres (Duval, 1996). Ainsi les objets mathématiques utilisés en algèbre linéaire peuvent être représentés par des symboles, ou par des tableaux de nombres, ou dans certains cas par des dessins. Il faut que les étudiants choisissent la représentation appropriée pour mener leur raisonnement, parfois en changeant de représentation par rapport à celle donnée dans l'énoncé ; il est aussi utile dans certains cas d'associer deux représentations. Une telle pratique est très courante pour les mathématiciens professionnels, comme nous l'avons dit ci-dessus (§1.2) ; pour les étudiants elle peut soulever des difficultés. Considérons l'exemple de l'exercice très classique ci-dessous (extrait de Gueudet-Chartier, 2000) :

Soient u, v, w , trois vecteurs deux à deux non colinéaires. Peut-on affirmer que la famille $\{u, v, w\}$ est libre ?

Certains étudiants, pour décider si la réponse à cette question ouverte est « oui » ou « non » dessinent trois vecteurs de l'espace, sous la forme de trois flèches (Figure 13). Ils ont choisi de raisonner dans le « registre graphique ». Généralement ces étudiants répondent alors « oui » à la question, alors que la réponse est négative.

Figure 13. Réponse d'un étudiant, mauvais emploi du registre graphique.



« Oui, la famille est libre ».

Dans le cas de cet exercice, il suffit de produire un contre-exemple, ce qui se fait très bien dans le registre des tableaux : « la famille formée des vecteurs $u=(1,0)$; $v=(0, 1)$ et $w=(1,1)$ fournit un contre-exemple. En effet ces vecteurs pris deux à deux ne sont pas colinéaires ; mais on a $w=u+v$, la famille n'est pas libre. ». Ainsi il ne suffit pas d'être capable de changer de registre, par rapport au registre symbolique de l'énoncé ; il faut choisir le « bon » registre pour mener son raisonnement. Mais quel est le « bon » registre, pour un exercice d'algèbre linéaire donné ? Il n'y a aucune réponse évidente à cette question, seule la pratique d'un grand nombre d'exercices amène le développement de choix pertinents...

3. Une différence de cultures institutionnelles

L'algèbre linéaire élémentaire n'est plus enseignée au secondaire en France depuis 1992 (création de la terminale S). Cependant les matrices, qui font partie de cette algèbre linéaire élémentaire font l'objet d'un enseignement dans la spécialité mathématiques en Terminale S depuis 2012. Est-ce que cet enseignement est de nature à faciliter la transition secondaire-supérieur, en ce qui concerne l'algèbre linéaire, ou du moins les matrices et le calcul matriciel ?

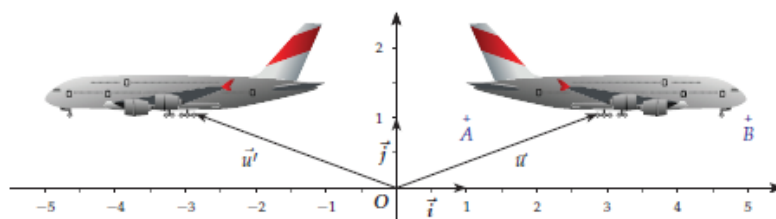
Considérons l'énoncé ci-dessous, extrait du manuel Sésamath 2016, TS Spécialité (Figure 14).

Figure 14. Matrices et symétrie, extrait du manuel Sésamath (2016)

TP 1 Traitement d'image INFO

A Un peu de réflexions

- 1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser la construction suivante :
 - Insérer une image au choix (Image1 et deux points A et B sont créés).
 - Repositionner Image1 telle que A soit en (1 ; 1).
 - Créer la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Appliquer la matrice M à l'image Image1 (l'image Image1' est créée).



Dans toute la suite, on se place dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 2) Soit deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
 - a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y .
 - b) En déduire que M est la matrice associée à la symétrie d'axe $(O; \vec{j})$.
- 3) Déterminer la matrice N associée à la symétrie d'axe $(O; \vec{i})$. Vérifier avec le logiciel.
- 4) Déterminer la matrice P associée à la symétrie de centre O. Vérifier avec le logiciel.
- 5) Exprimer P en fonction de M et N.

Dans cet énoncé il s'agit de déterminer la matrice de certaines transformations géométriques, et de faire le lien entre produit de matrices et composée de transformations. On note ici de nombreuses caractéristiques spécifiques du second degré. L'énoncé est illustré par une figure où l'on voit le dessin d'un avion, pour figurer l'effet de la symétrie d'axe vertical. Les élèves sont invités à la question 1) à utiliser un logiciel de géométrie dynamique, et avec ce logiciel à utiliser aussi une

figure. La matrice, entrée dans le logiciel, est « appliquée à la figure ». Le sens de cette expression n'a pas été évoqué dans le cours, ainsi ce que font les élèves avec le logiciel est de type « boîte noire ». Dans la question 2), on demande aux élèves de faire un calcul (en appliquant les règles de définition du produit qui ont elles été vues dans le cours), et d'en déduire que « M est la matrice associée à la symétrie d'axe (O ; j) ». Or le fait qu'une matrice puisse être associée à une transformation géométrique n'a jamais été évoqué dans le cours ; de plus ici on passe sous silence le fait que la transformation géométrique bien connue agit sur des points, alors qu'à partir de la question 2 on va examiner des transformations de vecteurs. Par ailleurs d'un point de vue mathématique, l'expression « la matrice » suggère qu'il y a une unique matrice associée à cette symétrie, alors même qu'il y a une infinité de matrices possibles, selon la base choisie comme référence. Dans les questions 3) et 4), l'expression « vérifier avec le logiciel » dénote elle aussi une pratique qui ne serait probablement pas acceptée à l'université, où la vérification se base principalement sur des démonstrations.

A l'université, l'énoncé d'un exercice semblable ressemblerait plutôt à celui ci-dessous :

Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 de la symétrie orthogonale d'axe dirigé par le vecteur (0,1).

Cet exercice serait donné durant, ou après un cours sur le concept d'application linéaire, et de matrice d'une application linéaire, probablement sans recours à un logiciel de géométrie dynamique.

4. Quels dispositifs, pour l'enseignement de l'algèbre linéaire ?

Différents dispositifs d'enseignement de l'algèbre linéaire ont été testés à la fin des années 1990, notamment à l'université de Lille (Rogalski, 2000). Ces dispositifs prennent en compte la nature unificatrice de l'algèbre linéaire, en essayant de mettre en évidence des similarités entre des questions différentes. Ils essayent aussi d'asseoir des prérequis nécessaires, notamment en logique, et de travailler les différentes exigences de flexibilité, notamment entre registres de représentation. Ces expérimentations ont été limitées dans le temps, et même si elles ont semblé améliorer la réussite des étudiants elles n'ont pas perduré, sans doute en partie parce qu'elles demandaient un investissement très important des enseignants. Il en est resté certaines situations intéressantes qui peuvent contribuer à la construction du sens de certains concepts abstraits par les étudiants.

Ainsi la situation dite des « carrés magiques » (Dorier, Gueudet, Peltier, Robert, & Roditi 2018) peut être utilisée pour l'introduction de la notion de système générateur et de base. Nous donnons ci-dessous l'énoncé complet (extrait de Dorier et al. 2018). Cependant cet énoncé n'est pas donné tel quel aux étudiants : on leur présente plutôt la définition de carré magique, et on les laisse ensuite réfléchir à la question « comment trouver des carrés magiques, comment les trouver tous ? ».

Les carrés magiques réels d'ordre trois : comment les trouver tous ?

On appelle carré magique réel d'ordre trois un tableau carré (matrice 3,3) de neuf nombres réels tel que les sommes des éléments de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale soient égales à un même nombre. On appelle somme* du carré ce nombre (L'astérisque permet de distinguer les deux occurrences du mot somme introduites dans la même phrase).

On note C l'ensemble de ces carrés magiques et on appelle C_0 l'ensemble des carrés magiques de somme* nulle.

1) Donner des exemples de carrés magiques, en essayant d'en construire des non triviaux. Pouvez-vous être sûr de les avoir tous ?

2) Un carré magique peut être considéré comme une matrice carrée d'ordre trois sur \mathbb{R} , notée (a_{ij}) , i et j entiers variant de 1 à 3.

En utilisant ce point de vue, montrer que C est un espace vectoriel. Montrer que C_0 est un espace vectoriel.

3) Montrer que pour tout carré magique de somme* nulle $3a_{22} = 0$.

Trouver un système générateur de C_0 .

4) On appelle $[1]$ le carré magique ayant des 1 partout et C_1 le sous-espace qu'il engendre dans C .

Montrer que, pour tout carré magique de somme* s , $3a_{22} = s$.

Montrer que C est somme directe de C_1 et C_0 .

4) En déduire une façon de trouver tous les carrés magiques d'ordre trois. Quelle est la dimension de C ?

Cet énoncé, et la manière de le pratiquer telle qu'indiquée permet de mettre en évidence le sens de la notion de système générateur, et en quoi un tel système peut être utile.

C. La logique

Les analyses produites dans ce texte sont majoritairement le fruit du travail dans la commission inter IREM Lycée (publication en cours). Les derniers programmes de lycée intègrent explicitement des éléments de logique que les enseignants doivent pointer, si ce n'est institutionnaliser, dès qu'ils en ont l'occasion au cours de leur enseignement des autres notions du programmes. Dans les manuels, cela se traduit assez souvent pas des petits encarts qui précisent tantôt « *ici on utilise la négation d'une implication, c'est-à-dire...* », tantôt « *ici on raisonne par l'absurde...* ». Mais en fait, au-delà de ces encarts, il y a souvent des inconsistances logiques dans les productions des manuels scolaires qui font qu'au sein de mêmes manuels, des disparités de formes dans les raisonnements logiques ne permettent pas aux élèves – voir aux enseignants – d'identifier clairement les types de raisonnements menés (Mesnil, 2016).

Au début de l'université, une certaine rigueur s'installe dans les enseignements magistraux de mathématiques, avec parfois dans certaines universités des modules de raisonnement mathématique à part entière. Même si on n'est plus dans les excès des années 80, il ne peut toutefois pas en être autrement pour entrer dans les premières preuves fondamentales de l'analyse au début de l'université : l'un des premiers grands théorèmes démontré en cours magistral est souvent la caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction. Pour sa preuve, on montre souvent la contraposée d'une implication et il faut alors nier une proposition universellement quantifiée. Autant de raisonnements logiques difficiles à suivre pour les étudiants. En Travaux Dirigés, un bon exercice est souvent de montrer l'équivalence entre le caractère bijectif d'une fonction sur un intervalle et les caractères injectif et surjectif. Sur la notion de suite, on demande aussi aux étudiants de manipuler un peu la définition formalisée de limite de suite. Même avec des rudiments de logique introduits dans les programmes de lycée, les manuels et les enseignements, il semble que les étudiants ne sont encore pas assez préparés et qu'à moindre frais – en explicitant et en clarifiant encore mieux les statuts des énoncés et les démarches de preuves – cela pourrait leur être bénéfique. Autrement dit, avec peu d'effort, un travail plus profond, sur la structure des

énoncés et des preuves, permettrait sûrement aux futurs étudiants de mieux entrer dans le jeu des démonstrations formelles qui doivent leur être proposées au début de l'université.

Par exemple, dans la preuve attendue au niveau terminale « Si une suite est croissante et admet pour limite L , alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à L ». Aucun manuel n'affiche clairement qu'il s'agit de montrer un énoncé de type (A et B implique C). Alors que la preuve se fait par l'absurde plusieurs manuels ne l'annoncent pas. L'identification de la structure (A et B implique C) permettrait aux élèves d'identifier les structures de preuves proposées : en effet selon les manuels, on suppose la négation de C et on montre une absurdité avec A (contradiction sur la croissance) ou avec B (contradiction avec la convergence vers L). Rien n'est explicité, notamment le fait que l'on puisse trouver une contradiction soit avec « la croissance » (preuve Indice, figure 15), soit avec « la convergence » (preuve Odysée, figure 16). On doit en effet utiliser les négations de la croissance ou de la convergence : ce sont des négations de propositions universellement quantifiées donc ce sont des propositions existentielles. Rien n'est explicité même si toutes ces subtilités logiques sont mises en jeu implicitement.

Figure 15. Contradiction avec la croissance, Indice Terminale S, (2016), p. 20

Propriété Si une suite est croissante et admet pour limite L , alors la suite est majorée par L .

Démonstration au programme (non exigible)
 Soit (u_n) une suite croissante qui converge vers L .
 Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p > L$.
 Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$ (1).
 $L > L - 1$ et $L < u_p$, donc $]L - 1 ; u_p[$ est un intervalle ouvert contenant L .
 Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$, par définition, l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui contredit (1).
 Donc pour tout n : $u_n \leq L$.

Figure 16. Contradiction avec la convergence, Odysée Terminale S, (2012), p. 38

2 Convergence des suites monotones

PROPRIÉTÉ
 Soit (u_n) une suite croissante définie sur \mathbb{N} .
 Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors la suite (u_n) est majorée par ℓ .

DÉMONSTRATION
 Démontrons cette propriété par l'absurde.
 Supposons qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
 Comme $u_{n_0} > \ell$, l'intervalle $] \ell - 1 ; u_{n_0} [$ est un intervalle ouvert qui contient ℓ .
 Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc l'intervalle $I =] \ell - 1 ; u_{n_0} [$ doit contenir tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang N .
 Mais la suite (u_n) est croissante, et $u_n \geq u_{n_0}$ pour tout $n > n_0$, donc, si $n > n_0$, $u_n \notin I$.
 Il est donc impossible que I contienne tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
 L'hypothèse est fautive et la suite (u_n) est majorée par ℓ . ■

De façon générale, presque tous les énoncés proposés au lycée sont de la forme « quel que soit x , $A[x]$ implique $B[x]$ ». La quantification universelle est la plupart du temps cachée aux élèves alors que seule sa présence permet de justifier la règle du contre-exemple « il existe x tel que $A[x]$ et non $B[x]$ » qui elle est pourtant massivement employée. Certains manuels – et pratiques - entretiennent également de la confusion en employant des mots inappropriés pour maquer des implications ou des quantifications, comme dans l’assertion sans statut mathématique clair « A donc B » ou bien des usages massifs du mot « avec » qui ne sont pas du tout appropriés pour la bonne compréhension des élèves et qui renforcent leurs incompréhensions. On trouve aussi bien en classe de 3^{ème} par exemple « si n est un entier impair, il s’écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k entier » - existentiel - et « tout nombre entier s’écrit sous la forme $2k + 1$ avec k entier est impair » - universel - (Hache, 2015).

Bibliographie

- Allard, C., Asius, L., Bridoux, S., Chappet-Pariès, M., Pilorge, F. & Robert, A. (2016). Quand le professeur de mathématiques est sur Youtube... *Cahier du LDAR 16*, IREM de Paris, Paris.
- Arnoux, P., Vaux, L. (2012). Recherches en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe, Actes du colloque EMF2012, (pp. 1282-1294) http://emf.unige.ch/files/3714/1018/0853/Actes-EMF2012-Ensemble_Textes.pdf
- Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques. *Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques*, Toulouse.
- Artigue M., Batanero C. & Kent P. (2007). Learning mathematics at post-secondary level. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1011- 1049. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.
- Balacheff, N. (2010) Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In: Hanna G., Jahnke H. N., & Pulte H. (eds.) *Explanation and proof in mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg: Springer.
- Bardini, C. & Pierce, R. (2018). Symbols: pillars of the secondary-university bridge? In *Preproceedings of INDRUM 2018* (pp. 478-486), Kristiansand : Norway.
- Barquero, B. (2018). The ecological relativity of modelling practices: adaptations of an study and research path to different university settings. INDRUM 2018, University of Agder, Norway.
- Barquero, B., Serrano, L. & Serrano V. (2013). Creating the necessary conditions for mathematical modelling at university. In B. Ubuz, C. Haser, M.A. Mariotti, *Proceedings of the Eighth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 950-959). Ankara, Turkey: Middle East Technical University and ERME.
- Barton, B., Clark, M., & Sherin, L. (2010). Collective dreaming: a school-university interface. *New Zealand Journal of Mathematics* 40, 15-31.
- Battie V. (2003) *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VII.
- Béjean, S. & Monthubert, B. (2015). Pour une société apprenante. Propositions pour une stratégie nationale de l'enseignement supérieur. Paris, MENESR. <http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/pid30540/strategie-nationale-de-l-enseignement-superieur-stranes.html>
- Bergé, A. (2016) Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels, actes de la première conférence INDRUM, Montpellier, 31 mars-2 avril 2016 <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/public/indrum2016proceedings.pdf>
- Berger, M. (2004) The Functional Use of a Mathematical Sign, *Educational Studies in Mathematics* 55, 81-102.
- Bergsten, C. (2011). Why do students go to lectures? In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1960-1970). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME.
- Bernard, D., Lémonon I., Sauvage, P., Lanco, L., Saby, N. (2013) Conférence d'ouverture : état des programmes et attentes de l'enseignement supérieur, *Actes du colloque inter IREM "La réforme des programmes du lycée, et alors ?"* Irem de Paris <http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ips13003pdf-e8e1.pdf>
- Biehler, R., Fischer, P.R, Hochmuth, R. & Wassong, T. (2011). Designing and evaluating blended learning bridging courses in mathematics. online blended courses. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Conference of European Researchers in Mathematics Education* (pp. 1971-1981). Rzeszow, Poland. <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/cerme7/CERME7.pdf>

- Biehler, R., Jaworski, B., Rønning, F., Wawro, M. & Winsløw, C. (2018). Education and professional development of University Mathematics Teachers. *Pre-proceedings of INDRUM 2018* (pp. 145-154). Kristiansand, Norway.
- Bloch I., Ghedamsi I. (2005). Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie, *Petit x*, 69, 7-30
- Bosch.M., Fonseca, C., Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2.3), 205-250.
- Bridoux, M. Chappet-Pariès, N. Grenier-Boley, C. Hache et A. Robert (2015) Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, *Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz*, 14, IREM de Paris: Paris <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS15005.pdf>
- Bridoux, S., Hache, C., Grenier-Boley, N. & Robert, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 21, 187–233.
- Bridoux, S. (2018). Classe inversée : une expérience en première année universitaire. Quelle réorganisation des apprentissages ? *Petit x*, 106,
- Bridoux, S. (2016). Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980: rêve ou réalité didactique pour l'enseignant? Proceedings of INDRUM 2016 First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, 31 mars – 2 avril 2016 (pp 53-62). Montpellier, <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/>
- Broley, L., Caron, F. & Saint-Aubin, Y. (2018). Levels of Programming in Mathematical Research and University Mathematics Education. *International Journal for Research in University Mathematics Education* 4(1), 38-55.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Burton, L. (1999). Mathematics and their epistemologies – and the learning of mathematics. In I. Schwank (Ed.) *European Research in Mathematics Education I: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 87-012) Osnabrück, Germany: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik and ERME.
- Burton, L. (2004). *Mathematicians as Enquirers: Learning about Learning Mathematics*. Netherlands: Springer.
- Castela, C. (2004). Institutions influencing mathematics students'private work: a factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics* 57, 33-63.
- Cazes, C., Mac Aleese, J, Vandebrouck, F. (2001). Vers un nouveau dispositif d'enseignement en Deug, Brochure IREM n°90, juin 2001, IREM de Paris 7. <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS01016.pdf>
- Cazes, C., Mac Aleese, J, Vandebrouck, F. (2003). Un semestre de DEUG SPAD, premier bilan, Brochure IREM n°90-1, Avril 2003, IREM de Paris 7. <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS03003.pdf>
- Cazes, C., Gueudet, G., Hersant, M. & Vandebrouck, F. (2007). Using E-exercise bases in mathematics: Case studies at university. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 327-350.
- Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématique de l'enseignement tunisien. *Petit x* 61, 11-34.
- Chellougui, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.
- Chevallard, Y. & Mercier, A. (1987). Sur la formation historique du temps didactique. *IREM d'Aix Marseille*, n°8. <http://numerisation.univ-irem.fr/MA/IMA87003/IMA87003.pdf>

- Chorlay, R. (2018). An empirical study of the understanding of formal propositions about sequences, with a focus on infinite limits. Proceedings of INDRUM 2018 Second conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics, 5-7 April 2018, Kristiansand, to appear
- Cologne, C., de Hosson, C. (2016). Apport d'un dispositif d'analyse de pratiques enseignantes instrumentées sur le développement professionnel des enseignants du supérieur. *Actualité de la Recherche en Éducation et en Formation - AREF*, 4-7 juillet 2016, Belgique : Mons.
- Commission Inter-IREM Université. (1990). *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année. Principes et réalisations*. IREM de Lille.
- Coppé, S., Dorier, J.-L., Yavuz, I. (2007) De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 27(2). 151-186.
- Corriveau, C. (2015). Aborder les questions de transitions dans une perspective d'harmonisation. *Actes du colloque EMF 2015* (pp. 982-993). Alger.
- Costa V.-A., Arlego, M. & Otero, M.-R. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad: propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria*.7(1), 20-40.
- Croft, T., Grove, M. & Lawson, D. (2016). The oversight of mathematics, statistics and numeracy support provision at university level. [http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/51691-How-to-set-up...final .pdf](http://www.sigma-network.ac.uk/wp-content/uploads/2012/11/51691-How-to-set-up...final.pdf)
- de Guzman M., Hodgson B.R., Robert A. & Villani V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education, *Documenta mathematica*, extra volume ICM 1998.
- de Hosson, C., Décamp, N., Morand, E. & Robert, A. (2015). Approcher l'identité professionnelle d'enseignants universitaires de physique: un levier pour initier des changements de pratiques pédagogiques. *Recherches en didactique des Sciences et des technologies*, 11, 161–190.
- De Vleeschouwer, M. (2008). Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques ? L'exemple de l'opération Tremplin à l'Université de Namur. In A. Thépaut & D. Lemaître, *Actes Du Colloque Questions De Pédagogies Dans l'enseignement Supérieur*, (pp. 289-299). Brest: Telecom Brest.
- Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Elvira Paez Murillo, R., Rouse, S., Vandebrouck, F., Verdugo, P., Vivier, L. (2016). Espace de Travail Mathématique, In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Ed.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIII^{ème} Ecole d'été de la 18^{ème} didactique des mathématiques, Brest, août 2015* (pp 421-440). Grenoble : La Pensée Sauvage
- Dorier, J.-L (dir.) (1997a). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Dorier, J.-L. (1997b) Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels, In Dorier, J.-L (dir.) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, (pp. 21-102). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Dorier, J.-L. (ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Dorier, J.-L., Gueudet, G., Peltier, M.-L., Robert, A. & Roditi, E. (2018). *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage*. Paris: Belin.
- Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1997) L'algèbre linéaire : l'obstacle du formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. In Dorier, J.-L (dir.). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, (pp.105-147). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Doyen, D. (2018). Utilisation de WIMS en L1 mathématiques à l'UPEM. Communication à l'IHP, Journée
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D.Tall (ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer academic publishers.

- Durand-Guerrier, V. & Arzac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 149-172
- Durand-Guerrier, V., Vergnac, M. (2011). Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu – Quelle élaboration ? *Actes du colloque inter IREM "La réforme des programmes du lycée, et alors ?"* Irem de Paris <http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/ips13003pdf-e8e1.pdf>
- Durand-Guerrier, V. & Vivier, L. (2016) Densité de \mathbb{D} , complétude de \mathbb{R} et analyse réelle. Première approche. Actes de la première conférence INDRUM, Montpellier, 31 mars- 2 avril 2016 <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016/public/indrum2016proceedings.pdf>
- Duval, R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16 (3), 348-382.
- Engineering Council (2000). *Measuring the mathematics problem*. London. <http://www.engc.org.uk/engcdocuments/internet/Website/Measuring%20the%20Mathematic%20Problems.pdf>
- Farah, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat Université Paris Diderot. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01195875>
- Fredriksen, H., Hadjerrouit, S., Monaghan, J. & Rensaa, R. (2017). Exploring Tensions in a Mathematical Course for Engineers utilizing a Flipped Classroom Approach. In T. Dooley & G. Gueudet, *Proceedings of the Tenth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education. (CERME 10, February 1 – 5, 2017)*. (pp. 2057-2064). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.
- Ghedamsi, I. & Lecorre, T. (2018). Students' understanding of ε -statements involving equality and limit. *Pre-proceedings of INDRUM 2018*, (pp. 34-43). Kristiansand, Norway.
- González-Martín, A. (2015). The use of textbooks by pre-university teachers. An example with infinite series of real numbers. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2124–2130). Prag: Charles University.
- González-Martín, A. & Hernandes-Gomes, G. (2018). The use of integrals in Mechanics of Materials textbooks for engineering students: the case of the first moment of an area. *Pre-proceedings of INDRUM 2018*, (pp. 125-134) Kristiansand, Norway.
- Gray, E. Pinto, M., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 38, 111-133.
- Grenier-Boley, N. (2009). Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. Cahier de Didirem, Numéro 59, Publication de IREM de Paris 7. <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS09001.pdf>
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.
- Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 3(1), 198-224.
- Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A., Kwon, O.-N., Verschaffel (2016). *Transitions in mathematics education*. ICME13 Topical survey series. New York, NY: Springer.
- Gueudet-Chartier, G. (2000). *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*, Thèse de doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- Gueudet, G. & Lebaud, M.-P. (2008). Quelle évaluation dans le supérieur en mathématiques ? In A. Thépaut & D. Lemaître, *Actes Du Colloque Questions De Pédagogies Dans l'enseignement Supérieur*, (pp. 289-299). Brest : Telecom Brest.

- Gueudet, G. & Lebaud, M.-P. (2014). Utilisation de ressources par les étudiants de première année pour les enseignements de mathématique : une étude exploratoire, sur le module AR1. *Rapport IREM de Rennes*.
- Gueudet, G., & Pepin, B. (2018). Didactic contract at university: a focus on resources and their use. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 4(1), 56-73.
- Gueudet, G. & Quéré, P. (2018). "Making connections" in the mathematics courses for engineers: the example of online resources for trigonometry. *Pre-proceedings of INDRUM 2018*, (pp. 145-154). Kristiansand, Norway.
- Gueudet, G., & Thomas, M. (2018). The secondary-tertiary transition in mathematics. In Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*
- Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x*, 97, 27-43.
- Hausberger, T. (2016). Comment développer des praxéologies structuralistes en Algèbre Abstraite ?. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36 (1), 97-142.
- Heublein, U. (2014). Student Drop-out from German Higher Education Institutions. *European Journal of Education*, 49(4), 497–513.
- Inglis, M. & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 358–390.
- Jaworski, B. & Matthews, J. (2011). How we teach mathematics: discourses on/in university teaching. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2022-2032). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów and ERME.
- Jullien, M., Matheron, Y., Schneider, O. (2003) Quelques éléments de réflexion sur le sujet de mathématiques de baccalauréat 2003 Série S. *Petit x*, 62, 72-77
- Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F., Vivier, L (2015) Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, cours à la 18ième école d'été de didactique des mathématiques, In Y. Matheron, G. Gueudet et al. (Ed.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015* (pp 47-66). La Pensée Sauvage
- Lalaude-Labayle, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire - Analyse didactique et épistémologique*. Thèse de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01419021>
- Lawson, D. & Croft, T. (2018, April). Lessons for mathematics higher education from 25 years of mathematics support. Presentation at the INDRUM 2018 conference, Kristiansand, Norway.
- Lebaud, M-P. (2010). L'outil WIMS dans le plan « Réussir en licence », 3e colloque international WIMS, Bordeaux, du 28 au 30 mai (http://www.math.u-bordeaux1.fr/WIMS_2010/presentation/Lebaud_Bordeaux_2010.pdf)
- Leininger-Frézal, C. (Guest Ed.) (2016). L'usage du cas et de l'exemple dans l'enseignement supérieur pratiques, apprentissages et rapport aux savoirs. *Recherches en Education* 27.
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T., Mejia-Ramos, J.P. & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47(2) 162-198.
- Leydecker, F. (2017). Interactive tools in lectures with many participants. In Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., Rück, H.-G. (Eds.). *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*. (pp. 169-171) Kassel, Germany: Universitätsbibliothek Kassel.
- Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in task solving, *Educational studies in mathematics* 41, 165-190.

- Lithner, J. (2003). Student's mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics* 52, 29-55.
- Lockwood, E., Ellis, A. B. & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(2), 165-196.
- Love, B., Hodge, A., Grandgenett, N, Swift, A-W. (2013). Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45:3, 317-324, DOI: 10.1080/0020739X.2013.822582 <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0020739X.2013.822582>
- Malige, F. (2013). Des élèves de ZEP découvrent la recherche et le métier de chercheur. Le stage Hippocampe d'octobre 2011 avec la classe de Première S1 du lycée Victor Hugo de Marseille. *Bulletin de l'APMEP* 502, 23-28.
- Martin-Deschamps, M., Le Tallec, P. & Waldschmidt, M. (2002). L'explosion des mathématiques. Paris : SMF & SMAI, <http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/>.
- Mejía-Ramos, J.P. & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: Further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics* 85, 161-173.
- Mesa, V., & Cawley, A. (2015). Faculty knowledge of teaching in inquiry-based learning mathematics. In K. Krainer; N. Vondrová, *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp.2194-2200). Prague, Czech Republic, Charles University and ERME.
- Mesa, V. & Griffiths, B. (2012). Textbook mediation of teaching: an example from tertiary mathematics instructors. *Educational Studies in Mathematics* 79, 85–107.
- Mesnil, Z. (2016) Un retour de notions de logique dans les programmes de mathématiques pour le lycée : un nouveau savoir à enseigner. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 21, 235-266
- Monnoyeur, F. (1992). *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*. Paris : Belin
- Nardi, E., Jaworski, B. & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From 'tricks' to 'techniques'. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 284-316.
- Nardi, E. & Iannone, P., (2005). To appear and to be: acquiring the « genre speech » of university mathematics. In M. Bosch (Ed.) *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 1800-1810) Sant Feliu de Guíxols, Spain: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull and ERME.
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *The foundations for success. The final report of the national mathematics advisory panel*. <https://www2.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf>
- Niss, M. (2001). University Mathematics Based on Problem-Oriented Student Projects: 25 Years of experience with the Roskilde Model. In Holton, D. *The teaching of Mathematics at University Level. An ICMI study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2011). A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 165-182.
- Ouvrier-Bufferet, C. (2015). Quelles sont les conceptions d'élèves, d'enseignants, de mathématiciens contemporains sur la définition ? Qu'en est-il de l'activité de définition ? Vers un modèle de l'activité de définition en mathématiques. *Repères IREM*, 100, 5-24
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.
- Pepin, B. (2014). Using the construct of the didactic contract to understand students' transition into university mathematics education. *Policy Futures in Education* 12(5), 646-657.
- Pham, F. (2003). *Fonctions d'une ou deux variables. (Des fonctions élémentaires aux fonctions implicites : chemins de la découverte, thèmes de réflexion, cours et exercices)*. Paris : Dunod.

- Rämö, J., Oinonen, L. & Vikberg, T. (2016). Extreme Apprenticeship – Emphasising conceptual understanding in undergraduate mathematics. In K. Krainer & N. Vondrova *Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2242-2248). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague and ERME.
- Robert A. (1985) Les limites de l'évaluation : la section témoin, heurs et malheurs de la section expérimentale, *Cahiers de didactique des mathématiques*, 18, IREM Paris 7 http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDM_18.3_Aline_Robert_-_Les_limites_de_l%27a9valuation_.pdf
- Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2), 139-190.
- Rogalski, M. (2000). L'enseignement d'algèbre linéaire expérimenté à Lille. In Dorier, J.-L. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. (pp. 159-184) Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Rogalski, M. (2016). Revenir à la notion de limite par certaines de ses raisons d'être : un chantier pour le début de l'analyse à l'université, *Actes du colloque INDRUM 2016*. (pp. 133-142) <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337945>
- Rousse, S. (2018). *Discret et continu au lycée. Enjeux de ces notions à travers l'étude de l'enseignement de l'analyse et des probabilités*, thèse de l'Université Paris Diderot, soutenue le 30 Novembre 2018.
- Sghaier, B., & Vandebrouck, F. (2018). Teaching and learning continuity with technologies. *Pre-proceedings of INDRUM 2018*, (pp. 84-93). Kristiansand, Norway.
- Sierpinska, A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67. La Pensée Sauvage, Grenoble
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra, in Dorier J.-L. ed. *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer.
- Søgaard Larsen, M. (2013). *Dropout phenomena at universities: what is dropout? Why does dropout occur? What can be done by the universities to prevent or reduce it? A systematic review. Clearinghouse - research series: 2013:15*: Danish Clearinghouse for Educational Research.
- Speer, N., Smith, J.-P. & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *Journal of Mathematics Behavior* 29, 99–114.
- Stylianides, G.J., Stylianides, A.J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 314-352.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Tall, D. & Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 12. pp 151-169
- Thomas, M., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C. & Xie, J. (2012). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In Cho S. (eds) *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp.265-284). Springer, Cham.
- Uysal, S. & Clark, K.M. (2019). *Using history of mathematics to inform the transition from school to university*. Communication présentée au colloque CERME11, Utrecht, the Netherlands.
- Vandebrouck, F. (2011) Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg*, 16, 149-185
- Vandebrouck, F., Corriveau C., Cherikh O. (2016) Transitions dans l'enseignement des mathématiques, compte rendu du projet special n°3 (pp 963-969), *actes de EMF2015*, Alger, 10-14 octobre 2015
- Vandebrouck, F., Robert, A. (2017) Activités mathématiques des élèves avec des technologies, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 333-382.

- Vivier, L. (2014). *Sur la route des réels. Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique. Habilitation à diriger des recherches.* Université Paris Diderot.
- Vygotsky, L. S. (1987). *The collected works of L.S. Vygotsky.* Volume 1. New York, NY, Springer.
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 1(3), 289-314.
- Weller, K. Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., Merkovsky, R. (2003). Students performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle. *Research in Collegiate Mathematics Education, V. CBMS Issues in Mathematics Education, volume 12.*
- Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds) *Actes de la XIIIème école d'été en didactique des mathématiques* (cd-rom). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Winsløw, C., Gueudet, G., Hochmut, R. and Nardi, E. (2018). Research on University Mathematics Education. In: T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger & K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe.* London: Routledge.
- Yong, D., Levy, R. & Lape, N. (2015). Why No Difference? A Controlled Flipped Classroom Study for an Introductory Differential Equations Course. *PRIMUS*, 25(9-10), 907-921.