CONFÉRENCE DE CONSENSUS

NOMBRES ET OPÉRATIONS : PREMIERS APPRENTISSAGES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire

Jean-François CHESNÉ et Jean-Paul FISCHER

Novembre 2015

Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire

Jean-François Chesné & Jean-Paul Fischer

Cnesco - Université de Lorraine, Laboratoire InterPsy

Novembre 2015

Table des matières

Table des figures

Résumé

Quelles sont les connaissances des élèves sur les nombres à l'école primaire ? Que savent faire les élèves en calcul ? Quels éléments ont-ils acquis partiellement ? Même si ce sont là des questions légitimes que se pose la société, les évaluations nationales (ÉN) ne sont pas complètement adaptées pour y répondre (cf., les critiques du **?**). Nous avons tenté néanmoins d'y répondre partiellement en nous appuyant sur les résultats de ces évaluations menées depuis plus de 20 ans par la Direction de l'évaluation, de la prospective et la performance. Sur la base de ces évaluations, nous nous sommes également intéressés, dans cette synthèse et encore davantage dans le rapport, aux variations de performances en fonction des caractéristiques des élèves ou des exercices. Quel est l'avantage d'imposer une technique opératoire posée par rapport à un calcul "libre" ? Existe-t-il un sous-domaine dans lequel les filles surclassent les garçons ? Ce sont là des observations qui échappent en grande partie aux critiques générales du HCE et qui sont fondamentales dans une perspective didactique ou d'égalité des chances. Nous avons donc analysé les résultats obtenus par les élèves à l'école primaire dans le domaine des nombres et du calcul, en relation non seulement avec les attendus institutionnels et relativement aux connaissances prescrites, mais aussi avec les caractéristiques des élèves ou des exercices qui leur sont proposés.

Notre rapport, qui n'a pas d'objectif d'exhaustivité, se focalise sur quelques points majeurs de l'enseignement primaire : les connaissances en début de l'enseignement obligatoire (CP), la connaissance des tables (addition et multiplication) et les acquis [1] des élèves en fin d'école primaire, avec un focus sur les nombres décimaux et l'enseignement des techniques opératoires posées.

Analyses globales

Les comparaisons globales de groupes d'élèves (selon l'établissement, l'origine sociale, l'âge, le trimestre de naissance, le genre) concernent les mathématiques de manière générale. Mais les items portant sur les nombres ont été largement majoritaires dans toutes les ÉN menées de 1989 à 2008 : les résultats de ces comparaisons en mathématiques ne diffèrent donc guère des résultats basés sur les comparaisons des seuls items numériques. Cela permet le recours à ces comparaisons générales pour examiner des hypothèses plus fines sur des différences entre groupes, même s'il convient de faire attention aux facteurs confondus pour ne pas arriver à des interprétations, ou explications causales, erronées [2].

Une première différence assez systématiquement examinée dans les ÉN concerne les performances des élèves de l'éducation prioritaire comparativement aux autres. Les élèves de l'éducation prioritaire ont systé-

1. Nous reprenons ce substantif beaucoup utilisé par les enseignants, mais soulignons dans le rapport, notamment à propos des tables de multiplication, que toute connaissance non réutilisée devient de moins en moins opérationnelle.
2. Des analyses "toutes choses égales par ailleurs", qui évitent une grande partie de ces possibles confusions, ont parfois été réalisées par la DEPP, mais pas de façon systématique.

matiquement des performances moyennes inférieures à celles de leurs pairs de l'éducation non prioritaire : leurs scores moyens sur 100 sont inférieurs en moyenne de 8 (resp. 10) points à ceux de leurs pairs de CE_2 (resp. $6^{\text{ème}}$). Par ailleurs, les analyses en fonction de la Catégorie Socio-Professionnelle (CSP) des parents, de l'âge scolaire, du statut public/privé des écoles, et du trimestre de naissance confirment des résultats connus ou établis dans d'autres domaines :

- les enfants de cadres supérieurs obtiennent le pourcentage de réussite le plus élevé alors que les enfants de personnes inactives obtiennent le pourcentage le plus faible, avec des écarts moyens entre les deux groupes de 16,5 points en début de CE_2 et de 19 points en début de $6^{\text{ème}}$;
- les élèves en avance dans le niveau de la scolarité par rapport à leur âge obtiennent le pourcentage de réussite le plus élevé alors que les élèves en retard d'au moins une année obtiennent le pourcentage le plus faible avec des écarts moyens entre ces deux groupes de 20,5 points en début de CE_2 et de 29 points en début de $6^{\text{ème}}$, les élèves d'âge standard étant plus proches des élèves en avance que des élèves en retard ;
- les élèves de l'enseignement privé obtiennent un pourcentage de réussite systématiquement plus élevé que celui des élèves de l'enseignement public, mais de très peu (1 point en début de CE_2 et 3,5 points en début de $6^{\text{ème}}$) ;
- les élèves d'âge standard nés au premier trimestre de l'année obtiennent un pourcentage de réussite plus élevé que leur camarades nés au dernier trimestre (6,5 points de plus en début de CE_2 et 4 points en début de $6^{\text{ème}}$).

La comparaison filles/garçons est en revanche, plus ambiguë. En moyenne, la différence en faveur des garçons est de l'ordre d'un point en début de CE_2 et de deux points en début de $6^{\text{ème}}$. Mais l'analyse plus précise des items des EN de 2000 à 2005 montre, aussi bien début de CE_2 qu'en début de $6^{\text{ème}}$, que les filles ont quasi systématiquement des performances supérieures à celles des garçons dans les techniques opératoires posées.

Les évaluations à l'entrée au CP

Les évaluations en début de CP menées en 2011 montrent que les enfants ont acquis de bonnes connaissances relatives aux nombres (suite des nombres au moins jusqu'à 30, dénombrement, et correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée) à leur sortie de l'école maternelle. Ces acquisitions se sont renforcées depuis 1997, possiblement après 2008. De manière intéressante, ce progrès semble contribuer à la réduction des inégalités sociales. Par exemple, quand il s'agit d'écrire des chiffres, des suites de nombres ou de faire des calculs simples, les enfants de père ouvrier ont progressé de 15 points de score entre 1997 et 2011 (de 45 % à 60 %), tandis que les enfants de père cadre n'ont progressé que de 12 points de score (de 59 % à 71 %).

Néanmoins, des questions de méthode suggèrent que les évaluations surestiment quelque peu ces acquisitions et leur progrès entre 1997 et 2011, ou compliquent leur interprétation. Les connaissances testées ne semblent concerner que des aspects "superficiels" du nombre (lecture, écriture) et le comptage un à un. La réussite aux items pour lesquels il est demandé aux élèves de compléter une suite écrite de nombres marque au mieux la capacité des élèves à identifier la logique de l'écriture décimale des nombres, ou à défaut leur mémorisation de l'écriture d'une suite de symboles. Plus généralement, on peut observer que l'évaluation n'éprouve pas la structure logico-arithmétique fondamentale d'itération numérique : un élève peut résoudre pratiquement toutes les questions (y compris les problèmes arithmétiques, vu le mode de réponse) sans avoir compris que le suivant d'un nombre s'obtient par l'ajout de 1 à ce nombre. Ces réserves ont trouvé un écho dans les résultats de l'étude réalisée deux années plus tard au CE_2, sur des élèves différents mais contemporains de - et comparables à - ceux du CP 2011. Cette étude semble en effet confirmer que les progrès observés en CP étaient superficiels ou/et artificiels, principalement du fait que la forte augmentation du niveau des acquis des élèves à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne s'est pas traduite par une augmentation à l'entrée au CE_2 en 2013.

Connaissance des tables (addition et multiplication)

Dans le domaine de la connaissance des tables (addition et multiplication de deux nombres entiers à un chiffre), il est important de distinguer une connaissance déclarative - savoir que "huit fois sept c'est cinquante-six" par exemple - de la connaissance procédurale - savoir comment faire pour retrouver le résultat - additionner répétitivement huit fois le nombre sept par exemple. La prise en compte de cette distinction dans les évaluations est difficile, même si on limite le temps de réponse.

Pour les additions, les pourcentages de réussite sont stables et élevés en CE_2 (environ 90 %) et dépassent 95 % en début de $6^{\text{ème}}$. Cependant, ces pourcentages ne traduisent pas nécessairement une connaissance déclarative : un élève surcomptant 2 à 8 (dire : 9, 10) pour calculer $2 + 8$, arrive à reconstruire rapidement le résultat non connu par cur, ce qui était possible dans le temps de calcul accordé (4 secondes). Lorsqu'un comptage un par un s'avère inefficace, pour $8 + 7$ notamment, on voit que les élèves de CE_2 dépassent à peine 81 % de réussite, ce qui montre que presque 20 % d'entre eux non seulement ne connaissent pas de manière déclarative $8 + 7$ mais aussi qu'ils ne disposent pas d'une procédure rapide pour retrouver le résultat, par exemple un passage de la dizaine : $8 + 7 = (8 + 2) + 5$.

Pour les multiplications, les tables sont loin d'être acquises en début de CE_2 : même la table de 2, la plus simple, ne conduit pas à un pourcentage de réussite proche des 100 %, ce qui suggère que certains élèves n'ont pas fait le lien entre doubler et multiplier par 2. En $6^{\text{ème}}$, on n'atteint pas les pourcentages de réponses correctes obtenus pour les additions, et les produits complexes des tables (comme 7 fois 8) posés sous forme de "multiplications à trou" (Dans 56 combien de fois 8 ?) ne semblent connus par cur que par un peu plus de la moitié des élèves. Cette observation a évidemment des conséquences pour des multiplications et des divisions posées (la multiplication posée 64×39 aux ÉN 2001 en $6^{\text{ème}}$, qui réactive 4 multiplications et 6 additions des tables, n'a été réussie que par 53,8 % des élèves), mais aussi pour des calculs mentaux effectués lors d'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat.

Les acquis des élèves en fin d'école primaire

Les "grands nombres" entiers, c'est-à-dire ceux auxquels les élèves ne peuvent plus associer une collection d'objets, constituent une difficulté pour une proportion importante d'élèves en fin d'école primaire. Les ÉN 2005 montrent qu'au moins 90 % des élèves, en éducation prioritaire comme hors éducation prioritaire, savent écrire un nombre entier inférieur à 1000 à leur entrée au CE_2. Ils sont tout aussi nombreux, à leur arrivée en sixième à savoir le faire pour un nombre entier inférieur à 10 000. Mais ce taux chute en moyenne d'environ 20 points dès qu'on dépasse 10 000, et de 30 points pour les élèves d'éducation prioritaire.

Autrement dit, un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un "grand nombre".

A l'arrivée en 6$^{\text{ème}}$, moins d'un élève sur deux réussit à passer d'une représentation à une autre pour un nombre décimal (de l'écriture décimale[3] à une écriture fractionnaire et vice-versa). Concernant la comparaison de deux nombres décimaux, leur assimilation aux nombres entiers - et même simplement à leur écriture - suffit aux élèves pour dire que 73,34 est plus petit que 73,81, mais fait obstacle dans le cas de la comparaison de deux nombres comme 150,65 et 150,7. Cette situation n'est pas spécifique aux élèves français comme le montrent largement les travaux issus de la recherche internationale, comme ne l'est pas non plus la difficulté pour un tiers des élèves à concevoir qu'il existe un nombre décimal (au moins) entre deux autres et à pouvoir en exhiber un.

La multiplication par 10, 100, d'un nombre entier n'est pas une difficulté pour les élèves puisque la procédure consistant à ajouter des zéros permet de donner un résultat correct ; les taux de réussite aux items correspondants sont alors supérieurs à 90 %. En revanche, multiplier par 10, 100, ... un nombre décimal dont la partie décimale comporte autant ou plus de chiffres que de zéros dans 10, 100, est une difficulté pour un tiers des élèves (11,39 10 ou 3,256 1 000) et le faire quand ce n'est pas le cas (35,2 100) l'est pour environ la moitié, avec une tendance à la baisse des résultats au cours des deux dernières décennies. A noter que les filles réussissent nettement moins bien ce type de tâches que les garçons (l'écart en leur défaveur est environ 8 points aux ÉN 2005 et 2008) et que les écarts des résultats éducation prioritaire/ hors éducation prioritaire sont également plus marqués qu'en moyenne (16,1 points pour l'item 35,2 $\times$ 100).

Les taux de réussite aux calculs mentaux sont peu élevés, voire très peu élevés. Rappelons qu'un "vrai" calcul mental s'effectue avec des procédures spécifiques, distinctes des algorithmes standards utilisés en calcul posé. Par exemple, pour l'addition 5,2 + 2,8 on pourra faire 5 + 2 puis 2 dixièmes + 8 dixièmes ou 5,2 + 2 + 0,8. Pour la multiplication 1,5 $\times$ 4, on pourra faire 2 fois 1,5 = 3 puis 2 fois 3 = 6. Mais certains élèves peuvent aussi "poser mentalement un calcul écrit", ce qui impose une mémorisation des calculs intermédiaires, et augmente les sources d'erreurs (par exemple sur le traitement de la virgule), d'autant plus quand le calcul est donné oralement, et donc quand aucun repère visuel extérieur n'est possible. Cette stratégie de "calcul posé mental" trouve ses limites quand le temps de réponse est court ou/et que les nombres en jeu ne s'y prêtent plus (par exemple : 58,34 + 9,99 ou 35 $\times$ 99). A noter que ces difficultés semblent persister en 6$^{\text{ème}}$ puisque les calculs 2,3 + 4,12 et 15,4 - 1,7 sont respectivement réussis par 34,7 % et 34,6 % des élèves en 2002 à l'ÉN à l'entrée en 5$^{\text{ème}}$.

Concernant le calcul posé, les évaluations en fin de CM$_2$ à 20 ans d'intervalle montrent que la performance des élèves aux techniques opératoires posées a considérablement baissé en deux décennies. Ainsi, l'addition 19 786 + 215 + 3 291 (respectivement la multiplication 247 $\times$ 36) a vu son pourcentage de réponses correctes baisser de 94 % (resp. 84 %) en 1987 à 83 % (resp. 68 %) en 2007. Cette chute des performances, et la moindre nécessité pratique de disposer de techniques manuelles efficaces pour des calculs que peu de gens ont à réaliser dans leur vie quotidienne, soulèvent la question de la poursuite de leur enseignement systématique et rend la faiblesse des résultats en calcul mental d'autant plus inquiétante. Deux observations plus locales accompagnent ce constat : la première est que le simple fait pour les élèves

3. "Ecriture avec une virgule"

d'avoir à poser eux-mêmes les opérations fait diminuer leur réussite, ceci étant nettement marqué lorsque des nombres décimaux sont en jeu ; la deuxième est que les filles réussissent certes mieux que les garçons les opérations posées en colonnes comme déjà souligné, mais en calcul mental cette comparaison tourne nettement en leur défaveur.

Conclusion

Les analyses des évaluations nationales ont apporté des éléments d'information, souvent inédits, sur des questions de didactique comme le "bénéfice" des apprentissages du comptage en maternelle, l'utilité et les conséquences de l'enseignement des techniques opératoires, la nature de la connaissance des tables d'addition et de multiplication en début de CE_2 ou de $6^{\text{ème}}$. Les performances en fin d'école primaire suggèrent qu'une proportion importante d'élèves peuvent se présenter à l'entrée au collège comme des "experts apparents" pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres). Mais cette réussite opérationnelle peut traduire une conceptualisation insuffisante des nombres décimaux, voire des nombres entiers. Même si les matériaux d'analyse que nous avons étudiés ne sont pas tous récents, et dans l'attente des résultats du Cedre 2014, il nous semble très probable que les acquis des élèves en 2015 ne diffèrent pas sensiblement de ceux de leurs aînés [4]. Au final, nous suggérons qu'il est urgent de répondre, en tenant compte des éléments d'information apportés par le rapport, à un certain nombre de questions, institutionnelles (Quelle place accorder au comptage en maternelle, au calcul posé ? Comment et quand introduire les nombres décimaux ?) et didactiques (sur les changements de désignations des nombres, sur leur représentation sur une demi-droite graduée, sur l'articulation entre calcul - mental et posé - et numération, et sur la multiplication).

4. L'évaluation Cedre, réalisée pour la première fois en mathématiques en fin d'école primaire en 2008, estimait alors qu'au moins 40 % des élèves ne maîtrisaient ni les principes de numération ni les techniques opératoires dès que des nombres décimaux sont en jeu.

Les acquis des élèves dans le domaine des nombres et du calcul à l'école primaire

Introduction

C'est à partir de 1979, en accompagnement de la réforme des programmes de l'école élémentaire que les premières évaluations nationales (ÉN)[5] des acquis des élèves ont eu lieu. La quasi-totalité d'entre elles ont été menées par la direction de l'évaluation, de la prospective et la performance[6] (DEPP) et sont de plusieurs natures :

– diagnostiques (ou en tout cas considérées comme telles à leur conception), comme les évaluations menées de 1989 à 2008 à l'entrée en CE2 et l'entrée en sixième ;
– conçues pour fournir des indicateurs dans le cadre de la Lolf (depuis 2007), la loi organique relative aux lois de finances promulguée en 2001, qui a pour objectif d'assurer vis-à-vis du Parlement une transparence budgétaire dans une logique de performances ;
– bilans en fin d'école et en fin de collège comme le programme Cedre (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons) mené pour la première fois en 2008 pour les mathématiques ; de nouveaux bilans ont eu lieu en 2014 (résultats à paraître) ;
– à objectif de comparaison temporelle comme l'étude menée en 2007 en fin de CM2, ou plus récemment celles de 2011 et 2013 respectivement au début de CP et au début de CE2 ;
– à objectif de comparaison longitudinale à partir de panels d'élèves.

Toutes ces évaluations ont fait ou font l'objet d'un traitement statistique basé sur les résultats d'un échantillon représentatif variant entre 3 000 et 8 000 élèves par niveau de scolarité (excepté le suivi de panels qui portent sur davantage d'élèves). Les évaluations menées en CE1 et en CM2 par la direction générale de l'enseignement scolaire (DGESCO) entre 2009 et 2012, et des évaluations d'expérimentation (PACEM : Projet pour l'acquisition de compétences en mathématiques) ou de dispositif (PRE : programmes de réussite éducative), réalisées auprès de plus de 3 000 élèves respectivement en début de 6ème et en fin de CM2, complètent cet inventaire.

Il n'est pas possible de rendre compte précisément des résultats de toutes ces évaluations, d'autant qu'ils ont déjà fait l'objet de nombreux commentaires et analyses synthétiques qu'il conviendrait aussi de discuter. Une tentative, plus systématique et exhaustive, mais pour la seule fin de l'école primaire et le début du collège, peut être trouvée dans la thèse récente de l'un d'entre nous (Chesné, 2014). Le présent rapport se

5. Un tableau des principaux sigles utilisés est fourni en Annexe B.
6. La DEPP est aussi maître d'œuvre pour l'évaluation internationale PISA. Elle est par ailleurs partenaire du Ministère de la Défense pour la mise en place des tests lors de la journée Défense et Citoyenneté, et à ce titre, a procédé en 2013 à une évaluation des jeunes de 17 ans en numératie.

focalisera sur quelques points majeurs de l'enseignement primaire dans le domaine des nombres et du calcul : les connaissances en début de l'enseignement obligatoire (CP), un thème particulièrement important car le CP est souvent précédé actuellement de trois, voire quatre, années d'école maternelle ; la connaissance des tables (addition et multiplication) dont on ne cesse de penser qu'elle régresse ; l'enseignement des techniques opératoires posées dont l'utilité sociale, comme outil de production du résultat d'un calcul, est désormais discutable ; les acquis des élèves en fin d'école primaire, essentiellement sur les nombres décimaux qui, du point de la numération, constituent un "sommet" de l'enseignement primaire.

Avant d'aborder ces points précis, nous rapportons toutefois succinctement les principales analyses globales des résultats de la DEPP. Il convient aussi, dès cette introduction, de répondre à une critique du Haut Comité de l'Éducation (HCE, 2011). Cette critique, sévère, concerne en effet une grande partie des travaux discutés dans le présent rapport et lui enlèverait une grande part de son intérêt si elle n'était pas prise en compte.

Selon le HCE, "les indicateurs tirés des évaluations nationales des trois paliers du socle commun ne sont pas fiables pour des raisons de méthode". Le HCE observe notamment que les enseignants font passer les évaluations à leurs propres élèves et les corrigent, et que certaines questions des évaluations ont été reprises à l'identique d'une année sur l'autre. Lorsqu'on se préoccupe de savoir si les ÉN permettent, ou ne permettent pas, de conclure qu'un élève maîtrise, ou ne maîtrise pas, le socle commun, de telles critiques sont pertinentes. En effet, si un enseignant corrige de manière généreuse les évaluations, laisse plus de temps que prévu, et fait des exercices repris des années antérieures en cours d'année (lui ou l'enseignant de l'année précédant l'ÉN), il surestimera certainement le nombre d'élèves qui maîtrise les compétences. A ces réserves du HCE, on pourrait d'ailleurs ajouter le phénomène de copiage qui peut affecter toutes les passations collectives conduisant à une évaluation individuelle. Ce phénomène pourrait être accentué en situation scolaire : d'une part, parce que en dehors des évaluations individuelles les enseignants encouragent généralement les élèves à coopérer et à s'entraider ; d'autre part, parce que les élèves qui n'ont pas les connaissances attendues à leur niveau de scolarité, pour quelque raison que ce soit (motivation, difficulté d'apprentissage), mettent généralement en œuvre des stratégies de survie dont le copiage peut être une composante importante.

Empiriquement, on peut approcher les conséquences de la reprise à l'identique des items grâce à une évaluation de l'impact des vacances (Chollet-Remvikos et Levasseur, 2004). A cette dernière fin, les items de l'ÉN 1998 ont été repris systématiquement en début de CE2 et de 6$^{\text{ème}}$ en 1999. Si les enseignants de CE1 et de CM2 avaient préparé, durant l'année scolaire 1998-1999, leurs élèves aux items spécifiques des évaluations du début 1998, on aurait dû enregistrer des performances nettement supérieures en 1999 en début de CE2 ou de 6$^{\text{ème}}$. Une comparaison des 78 items de mathématiques de CE2 montre que 50 d'entre eux sont effectivement mieux réussi en 1999 qu'en 1998 ; en 6$^{\text{ème}}$, il en est de même de 67 des 82 items. L'impact, favorable pour la réussite, de la répétition des items ne peut donc pas être écarté. Néanmoins, il faut bien voir que dans notre approche par l'étude de l'impact des vacances, cette répétition est doublement extrême : d'une part, tous les items ont été répétés ; d'autre part, la répétition s'est faite d'une année à l'autre. Dans la plupart des ÉN que nous commentons, la répétition n'a jamais été aussi extrême : d'une part, elle concerne souvent une petite partie des items, d'autre part la répétition se fait parfois à plusieurs années de distance. Comment la répétition d'un item, comme le calcul posé de 523 $\times$ 305, qui a été repris en début de 6$^{\text{ème}}$ en 1995, 1999, 2000, 2004, 2005, 2006 et 2008, et a conduit, respectivement, à

69,6 %, 64,9 %, 60,5 %, 60,8 %, 55,9 %, 53,1 % et 53,4 % de réussites, peut-elle expliquer l'évolution de la performance ? On peut certes arguer qu'une stabilisation, par exemple entre 2005 et 2008 pour notre exemple, peut résulter d'une compensation entre une augmentation par la répétition et une diminution des performances avec le temps, mais un principe de parcimonie conduit plutôt à penser que la répétition à l'identique de certains items n'influence pas significativement les résultats.

Par ailleurs, les critiques du HCE n'affectent pas, ou beaucoup moins, certaines comparaisons entre groupes de sujets. En effet, un enseignant peut difficilement laisser plus de temps que prévu pour un groupe d'élèves (e.g., les garçons) et pas pour un autre (e.g., les filles). En outre, les critiques du HCE concernent l'évaluation des élèves, alors que, dans un but d'analyse des difficultés des élèves, le présent rapport s'intéresse avant tout aux tâches en comparant les performances relatives à des items. Or, d'un point de vue méthodologique, les 80 à 100 items de chaque ÉN ont été administrés, chaque fois, par le même enseignant et résolus par les mêmes élèves. Il en résulte un "instrument de mesure" (à savoir les élèves en interaction avec leur enseignant) intra-évaluation parfaitement identique pour tous les items. En privilégiant donc des comparaisons peu discutables, nous évitons en grande partie des critiques semblables à celles du HCE. En outre, certaines insuffisances dues aux questions à choix multiple (QCM), également pointées par le HCE, n'invalident pas non plus nos comparaisons, étant entendu que nous ne comparerons que ce qui est comparable [7].

I Analyses globales

Les ÉN de 1989 à 2008 à l'entrée en CE_2 et l'entrée en sixième ont souvent rapporté des moyennes par grands domaines : Géométrie, Mesures, Numérique, Problèmes numériques. Les comparaisons de ces domaines dans les évaluations en début de CE_2 de 1994 à 2006, rassemblées en Annexe C, montrent certes que les problèmes sont un peu moins bien réussis que les autres tâches numériques et, surtout, que les travaux géométriques. Mais ces comparaisons - faute de la possibilité d'un calibrage *a priori* rendant les domaines comparables - ont plutôt une fonction de régulation (voir par exemple que la géométrie n'est pas négligée) que de renseignement sur les difficultés sélectives des élèves [8].

On pourrait aussi penser exploiter les évaluations à différents niveaux de la scolarité (CP, CE_1, CE_2, CM_1, CM_2, $6^{ème}$) pour arriver, à l'instar des études transversales du développement, à une description de l'évolution d'un élève typique. Les sujets transversaux comme la numération, la résolution de problèmes, voire l'estimation de l'ordre de grandeur d'un résultat, se prêteraient à une telle exploitation. Mais, pour des raisons évidentes d'effets plancher (quasiment aucun élève ne sait répondre) et plafond (quasiment tous les élèves savent répondre), les mêmes questions n'ont jamais été posées de 5 à 12 ans. L'analyse de ces sujets transversaux conduirait alors à une description d'un grand nombre de tâches, de modalités de réponse, et de pourcentages de réussite associés, dont la comparaison n'est pas directe et dont la conclusion est souvent évidente : par exemple, en numération les élèves maîtrisent des nombres (entiers) de plus en plus

7. Par exemple, dans l'analyse des trois items de l'activité 21 (Dossier n° 65, 1996 p.93), il faudrait tenir compte du fait qu'un élève, qui n'a que deux choix ($<$ ou $>$), a une chance sur deux de répondre correctement au hasard. Les pourcentages de réponse correcte à ces items ne sont donc pas comparables à ceux d'items où les élèves n'avaient quasiment aucune chance de réussir au hasard.

8. Ce manque d'intérêt, ajouté au fait que les domaines y sont plus divers (intra- et inter-évaluations), nous a conduit à renoncer à présenter un tableau analogue (à celui de lAnnexe C pour le CE_2) pour les évaluations en début de $6^{ème}$.

grands, en lien assez direct avec les programmes scolaires (100 au CP, 1 000 au CE_1,...). En l'absence de comparaisons historiques ou internationales (hors des limites de ce rapport), ce progrès à travers la scolarité ne pourrait d'ailleurs guère servir à évaluer l'efficacité de l'enseignement. Nous y voyons une justification supplémentaire de notre centration sur quelques points "chauds" du débat pédagogique contemporain (voir l'introduction).

Les comparaisons globales de groupes d'élèves (selon l'établissement, l'origine sociale, l'âge, le trimestre de naissance, le genre) concernent les mathématiques de manière générale. Mais les items numériques ayant été largement majoritaires dans toutes les évaluations, les résultats de ces comparaisons en mathématiques ne doivent guère différer de résultats basés sur les comparaisons des seuls items numériques. Au demeurant, les résultats parfois publiés par item permettent de vérifier que les items de géométrie ne se distinguent guère des autres items ; nous pourrons y recourir pour examiner des hypothèses plus fines sur des différences entre groupes.

Figure 1 – Scores (de mathématiques) moyens en début de CE_2 en fonction de variables sociodémographiques et scolaires

Scores moyens sur 100 en CE2		1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	Moyenne
Sexe	fille	71,6	69,4	65,3	66,9	69,2	66,1	64,8	-	69,7	68,6	**68,0**
	garçon	70,3	69,0	66,8	67,5	68,8	67,3	65,9	-	72,0	71,2	**68,8**
Age	en avance	80,6	80,3	75,5	73,1	79,9	77,2	73,5	-	82,5	80,2	**78,1**
	à l'heure	72,8	70,8	67,4	68,9	70,5	68,1	66,9	-	72,0	71,3	**69,9**
	un an ou plus de retard(1)	59,2	59,5	57,6	57,8	57,2	56,3	53,7	-	59,0	58,4	**57,6**
Origine sociale	cadre supérieur	78,6	76,5	72,9	73,8	75,3	74,2	72,0	-	78,5	78,5	**75,6**
	profession intermédiaire	75,0	72,1	69,3	71,7	73,5	68,1	69,1	-	75,7	73,6	**72,0**
	agriculteur, exploitant	75,0	68,5	72,9	69,5	72,0	67,5	67,1	-	73,2	73,4	**71,0**
	artisan, commerçant	73,8	70,0	65,4	68,5	68,7	67,4	65,8	-	71,2	71,2	**69,1**
	employé	71,5	70,8	67,1	69,0	69,3	67,2	65,2	-	70,9	69,6	**68,9**
	ouvrier	67,4	65,7	62,0	63,4	64,7	61,5	60,8	-	65,2	66,3	**64,1**
	(retraités), inactifs	61,0	59,5	59,4	54,4	54,4	60,2	58,7	-	64,1	60,0	**59,1**
ZEP	oui	61,1	62,6	-	60,3	61,7	60,7	59,1	59,6	65,6	63,5	**61,4**
	non(2)	71,9	69,9	-	68,5	70,1	67,7	66,0	70,7	71,9	71,1	**69,8**
Enseignement	public	70,6	68,9	-	66,9	68,8	66,6	64,9	69,5	71,1	69,9	**68,6**
	privé	72,4	71,0	-	68,7	70,8	67,5	67,9	-	69,4	70,2	**69,7**
Trimestre Naissance	janvier-mars	-	71,3	69,7	71,5	72,6	69,8	-	-	-	-	**71,0**
	avril-juin	-	71,0	67,2	67,8	69,8	66,9	-	-	-	-	**68,5**
	juillet-septembre	-	67,9	64,8	66,4	69,0	65,0	-	-	-	-	**66,6**
	octobre-décembre	-	66,6	62,7	63,6	64,7	65,0	-	-	-	-	**64,5**

(1) Parfois un an de retard exactement

(2) Aussi hors REP en 2003 et 2004

Dans les tableaux 1 et 2 nous surlignons en vert (resp. rouge) la modalité la plus (resp. la moins) performante pour chaque variable. Dans la lecture de ces tableaux, il convient cependant de faire attention aux facteurs confondus pour ne pas arriver à des interprétations, ou explications causales, erronées. Précisons d'ailleurs, à ce sujet, que certaines analyses "toutes choses égales par ailleurs" de la DEPP, qui évitent une grande partie de ces possibles confusions, n'ont pas été synthétisées dans ce rapport parce qu'elles sont moins systématiques et parce que les coefficients qui y servent de mesure de la différence entre modalités ne peuvent pas être moyennés, ni comparés (strictement) d'une ÉN à l'autre.

Une différence assez systématiquement examinée dans les ÉN concerne les performances des élèves l'éducation prioritaire (ZEP, REP, ultérieurement RAR, RRS) comparativement aux autres. Les élèves de ZEP ont systématiquement des performances moyennes inférieures à celles de leurs pairs de l'éducation non prioritaire : les 9 comparaisons recensées, aussi bien dans le tableau 1 que dans le tableau 2, montrent toutes une performance inférieure des élèves de ZEP ; leurs scores moyens sur 100 sont inférieurs en moyenne de 8 (resp. 10) points à ceux de leurs pairs de CE_2 (resp. $6^{\text{ème}}$). En outre, les comparaisons par item rapportées dans les évaluations nationales de 2000 à 2002 montrent que :

- en début de CE_2 les élèves de ZEP ont une moyenne inférieure à celle des élèves hors ZEP à 82 des 83 items en 2000, à 81 sur 85 en 2001, et à 82 sur 86 en 2002 ;
- en début de $6^{\text{ème}}$ les élèves de ZEP ont une moyenne inférieure à celle des élèves hors ZEP à 89 des 90 items en 2000, à 75 sur 75 en 2001, et à 77 sur 77 en 2002.

Ces résultats sont sans grande surprise puisqu'ils résultent presque des critères de catégorisation des établissements dans l'éducation prioritaire. Ils sont néanmoins d'autant plus impressionnants que les rares items où les élèves de ZEP sont plus performants (que les élèves hors ZEP) peuvent être affectés par un effet plafond (e.g., l'item 13 de 2000 en $6^{\text{ème}}$: plus de 96 % de réussite) ou une ambiguïté de la consigne (e.g., l' item 32 de 2001 en CE_2) ; ils peuvent aussi concerner la géométrie comme le seul item de CE_2 qui fait exception, en 2000, à la supériorité des performances hors ZEP.

Figure 2 – Scores (de mathématiques) moyens en début de 6ème en fonction de variables socio-démographiques et scolaires

Scores moyens sur 100 en 6e		1997	1998	1999	2000(4)	2001	2002	2003	2004	2005	2006	Moyenne
Sexe	fille	53,9	60,6	62,9	64,4	66,4	63,5	60,3	63,3	61,9	62,1	**61,9**
	garçon	55,6	59,6	63,4	64,2	67,2	66,3	64,0	65,0	65,8	65,8	**63,7**
Age	en avance	72,4	76,1	76,7	-	81,6	80,0	78,5	-	79,4	80,1	**78,1**
	à l'heure	58,2	64,4	67,5	-	71,4	69,1	66,7	-	67,9	68,0	**66,7**
	retard: un an ou plus(1)	44,7	49,0	49,4	-	52,2	50,6	49,4	-	50,8	50,0	**49,5**
Origine sociale(2)	cadre supérieur	65,2	70,3	72,7	-	76,3	76,6	72,4		74,1	73,9	**72,7**
	profession intermédiaire	59,3	64,6	67,7	-	69,7	69,8	66,7	66,9	68,8	69,2	**67,0**
	agriculteur, exploitant	57,8	56,5	66,7	-	73,7	66,4	69,1		67,4	65,5	**65,4**
	artisan, commerçant	56,1	63,6	63,5	-	68,9	66,8	65,0		67,3	66,8	**64,8**
	employé	52,6	62,1	61,7	-	67,4	62,9	61,7		64,0	64,0	**62,1**
	ouvrier	49,1	54,6	58,7	-	61,3	57,7	56,0	56,1	58,0	58,9	**56,8**
	(retraités), inactifs	48,2	52,8	54,8	-	58,3	54,0	53,7		54,4	55,2	**53,9**
ZEP	oui	49,4	51,8	-	54,8	58,5	52,5	52,8	52,5	57,4	55,9	**54,0**
	non(3)	55,4	61,2	-	66,1	68,2	66,5	63,1	65,9	65,0	65,2	**64,1**
Enseignement	public	54,3	59,2	-	-	65,6	64,8	61,2	-	63,4	63,2	**61,7**
	privé	56,5	63,7	-	-	71,6	65,7	66,7	-	65,8	66,7	**65,2**
Trimestre Naissance	janvier-mars	-	60,0	64,8	-	70,5	-	-	-	-	-	**65,1**
	avril-juin	-	61,7	63,8	-	67,8	-	-	-	-	-	**64,4**
	juillet-septembre	-	61,1	61,9	-	65,1	-	-	-	-	-	**62,7**
	octobre-décembre	-	57,5	62,0	-	64,0	-	-	-	-	-	**61,2**

(1) Parfois un an de retard exactement.

(2) En 2004, les 4 premières catégories ont été réunies, ainsi que les 3 dernières : les deux pourcentages correspondants ne sont pas pris en compte dans le calcul des moyennes.

(3) Aussi hors REP en 2003 et 2004.

(4) Les moyennes sont calculées à partir des items (elles ne tiennent pas compte des poids des sujets).

Les ÉN des tableaux 1 et 2 peuvent être complétées par l'évaluation plus récente de la DGESCO, en 2011, en fin de CE_1 qui conduit à un constat analogue : les pourcentages moyens (non pondérés) de réussite des élèves issus d'écoles en RAR (49,4 %) ou en RRS (52,5 %) sont inférieurs d'environ 10 points (de pourcentage) à ceux des élèves du public hors RAR et RRS (60,8 %).

Les analyses de la performance en mathématiques en fonction de la Catégorie Socio-Professionnelle (CSP) des parents, de l'âge scolaire, du statut public/privé des écoles, et du trimestre de naissance confirment des résultats connus ou établis dans d'autres domaines. Nous soulignerons donc seulement la netteté de ces observations et les écarts parfois impressionnants entre les catégories extrêmes qui apparaissent dans les tableaux 1 et 2.

– Les enfants de cadres supérieurs obtiennent le pourcentage de réussite le plus élevé alors que les enfants de personnes inactives obtiennent le pourcentage le plus faible, tant en début de CE_2 (9 fois sur 9), qu'en début de 6ème (8 fois sur 8) ; avec des scores sur 100, la différence moyenne entre les deux groupes de CSP extrême est de 16,5 points en début de CE_2 et de 19 points en début de 6ème.

– Les élèves en avance dans le niveau de la scolarité par rapport à leur âge obtiennent le pourcentage de réussite le plus élevé alors que les élèves en retard d'au moins une année obtiennent le pourcentage le plus faible, tant en début de CE_2 (9 fois sur 9), qu'en début de $6^{\text{ème}}$ (8 fois sur 8) ; avec des scores sur 100, la différence moyenne entre ces deux groupes est de 20,5 points en début de CE_2 et de 29 points en début de $6^{\text{ème}}$. Les élèves d'âge standard sont, à une exception près (sur les $9 + 8$ comparaisons), plus proches des élèves en avance que des élèves en retard.
– Les élèves de l'enseignement privé obtiennent un pourcentage de réussite systématiquement plus élevé que celui des élèves de l'enseignement public, tant en début de CE_2 (8 fois sur 8), qu'en début de $6^{\text{ème}}$ (7 fois sur 7) ; avec des scores sur 100, la différence moyenne entre ces deux groupes est toutefois faible : 1 point en début de CE_2 et de 3,5 points en début de $6^{\text{ème}}$. La performance supérieure des élèves l'enseignement privé est aussi confirmée par l'étude CE_1 de la DGESCO (2011) : 62,5 % dans le privé, contre 59,3 % dans l'ensemble du secteur public ou 60,8 % dans le public hors RAR et RRS. La confusion de facteurs ne permet toutefois pas d'attribuer simplement cette différence à la qualité de l'enseignement.
– Les élèves d'âge standard nés au premier trimestre de l'année obtiennent un pourcentage de réussite plus élevé que leur camarades nés au dernier trimestre (qui ont donc, en moyenne 9 mois de moins), tant en début de CE_2 (5 fois sur 5), qu'en début de $6^{\text{ème}}$ (3 fois sur 3) ; avec des scores sur 100, la différence moyenne entre ces deux groupes est de 6,5 points en début de CE_2 et de 4 points en début de $6^{\text{ème}}$. Ces moyennes, complétées avec celles assez bien ordonnées des trimestres intermédiaires, suggèrent que le trimestre de naissance exerce un effet encore sensible en début de $6^{\text{ème}}$, même si l'intensité de cet effet est un peu atténuée par rapport à celle en début de CE_2.

Le commentaire sur le genre, qui résulte des tableaux 1 et 2, est, en revanche, plus ambigu. Alors que la performance des garçons est assez systématiquement supérieure à celle des filles après 2001, l'issue est plus variée jusqu'à 2001. En moyenne, la différence en faveur des garçons est de l'ordre d'un point en début de CE_2 et de deux points en début de $6^{\text{ème}}$. Cette différence est donc faible. Nous affinerons cette comparaison entre genres en fonction du sous-domaine, ou de la tâche, dans la partie IV.

II Les évaluations à l'entrée au CP

Les évaluations à l'entrée au CP, faites durant le premier mois de l'année scolaire, peuvent nous renseigner sur les acquis des élèves à l'issue de l'école maternelle puisque, en France, la quasi-totalité des enfants est scolarisée au moins deux années avant l'école élémentaire. Les évaluations de 1997, du fait de leur reprise en 2011, peuvent en outre nous renseigner sur les changements durant la période de 14 ans séparant les deux dates et incluant les "nouveaux" programmes 2002 et 2008. Ces derniers, notamment par leur insistance sur la suite des nombres à acquérir au moins jusqu'à 30, le dénombrement, et la correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée, pourraient avoir influencé les pratiques des enseignants.

1 Les observations

En 1997, les élèves avaient déjà de bonnes performances dans les types de tâches pointés ci-dessus : dans des lignes d'écritures de 8 nombres, au moins les deux tiers des élèves savaient détecter les écritures de 19, 12, 9, 22 ou 25 ; dans des extraits de la suite de nombres, ils savaient compléter le nombre absent s'il n'est pas trop grand (aux deux extrêmes on trouve 86 % de réussites pour 3 et 25 % pour 70), bien que seulement 28 % d'entre eux aient écrit la suite des nombres au moins jusqu'à 20 ; la moitié des élèves savaient dénombrer une collection non structurée de 17 dessins hétérogènes. Dans une tâche plus conceptuelle, plus de la moitié des élèves savait résoudre de petits problèmes arithmétiques verbaux dynamiques (i.e., avec des verbes d'action : on donne, on gagne, on prend) lorsque l'ajout ou le retrait est petit (égal à 2) et que le choix de réponse sur une ligne numérique permet un comptage directement sur la ligne ; en revanche, ils n'y arrivaient plus lorsque l'ajout est grand (égal à 14) et que la ligne numérique lacunaire ne permet plus un comptage direct. Nous illustrons le mode de réponse particulier avec l'un des trois problèmes (64 % de réussite) : "J'ai 7 billes. J'en gagne 2. En tout, j'en ai . . . " ; l'élève devait entourer la bonne réponse sur la figure 3.

Figure 3 – Le choix de réponse aux problèmes arithmétiques verbaux de l'évaluation en début de CP en 1997 et en 2011

En 2011, les élèves de CP ont eu des performances significativement supérieures dans tous les items numériques. Cela, notamment, a conduit la DEPP à titrer sa note d'information : Forte augmentation du niveau des acquis des élèves à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 (Le Cam et al., 2013).

De manière intéressante, ce progrès semble contribuer à la réduction des inégalités sociales. Par exemple, pour l'épreuve numérique, Le Cam et al. (2013) soulignent (pp. 3-4) que les enfants de père ouvrier ont progressé de 15 points de score entre 1997 et 2011 (de 45 % à 60 %), tandis que les enfants de père cadre n'ont progressé que de 12 points de score (de 59 % à 71 %).

Observons en outre que des items de comparaison numérique de deux rangées de jetons ont conduit à des réussites largement supérieures à 80 % dans les deux évaluations lorsque la réponse s'impose visuellement (4 des 5 items), mais plus lorsqu'elle ne l'est pas (1 des 5 items). Mais ces items ont été éliminés de la comparaison 1997-2011.

2 Les questions méthodologiques

Outre l'élimination de quelques items de comparaison que nous venons de mentionner, on peut s'interroger sur l'absence de prise en compte du niveau de réponse correcte par hasard dans les questions à choix de réponse multiple (QCM). Ainsi, dans les items de comparaison, les élèves avaient une chance sur deux de répondre correctement au hasard (en respectant les consignes), dans l'item de comptage de 17 objets et dans les problèmes arithmétiques ils avaient 1 chance sur 6 de répondre correctement. En outre, pour ces derniers, l'élève qui a compris qu'un ajout augmente la quantité et que les nombres vont en croissant sur la ligne numérique, saura que la réponse est au-delà (à droite) de 7 dans le problème associé à la figure 4. Au hasard un tel élève aura donc 1 chance sur 3 de répondre correctement (environ 33 %).

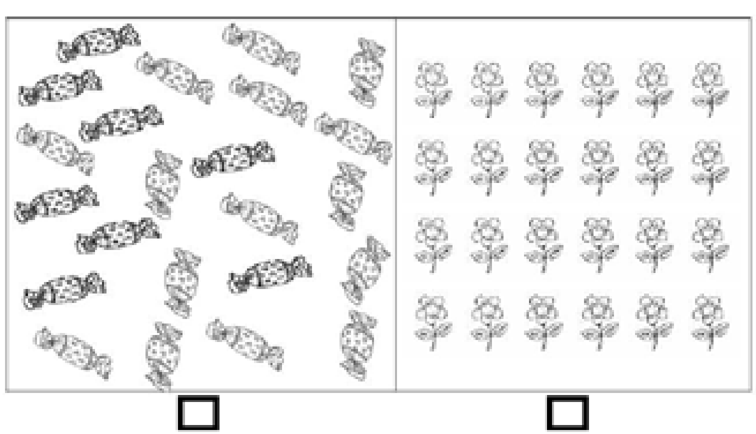
On sait aujourd'hui que les élèves de 5 ou 6 ans écrivent massivement les chiffres en miroir, notamment 3 qui est écrit ε dans 45 % des cas (Fischer, 2013). Ces inversions ne se produisent que lorsqu'ils les écrivent de mémoire, pas lorsqu'ils copient les chiffres. Or dans le livret enseignant, aucune consigne quant à l'enlèvement des affichages dans la classe n'est donnée. Un tel affichage a donc pu aider certains élèves à retrouver l'écriture correcte. En effet, notre expérience montre qu'en début d'apprentissage de l'écriture, les enfants qui ne connaissent pas encore l'orientation de l'écriture (ou qui n'en sont pas sûrs) de certains caractères (lettres ou chiffres) ont développé des habiletés à les détecter dans leur environnement. Mais, si l'affichage de la suite des nombres (que l'on trouve dans quasiment toutes les classes de CP) n'a pas été retiré, l'écriture en miroir n'est pas la seule à poser problème : la performance à l'item de complètement de la case manquante dans la suite 2, □, 4, 5, 6, 7, 8 risque d'être surestimée et, en cas d'affichage des dates jusqu'à 31, le complètement avec 17 et 29 aussi.

Enfin, pour ce qui concerne la réduction des inégalités sociales, on peut se demander si la comparaison des progrès des enfants d'ouvriers et de cadres est bien légitime. En effet, ces deux groupes n'avaient pas la même marge potentielle de progression. Si on rapporte le progrès à la marge de progression, les premiers ont progressé de 15 points sur 55 ($15/55 \approx 27{,}3$ %) et les seconds de 12 sur 41 ($12/41 \approx 29{,}3$ %). La conclusion que l'on peut tirer de ce progrès différencié devrait donc plutôt être celle d'une meilleure progression des enfants de père cadre !

3 Les interprétations

Les programmes scolaires, dont quelques points forts ont été rappelés en introduction de cette partie, ne sont certainement pas étrangers aux bonnes performances des élèves, même si celles-ci ont peut-être été surestimées (comme le suggèrent certaines des questions méthodologiques soulevées). La performance, supérieure en 2011 par rapport à celle de 1997, a certainement été favorisée aussi par un item de l'"Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle" (MEN-DGESCO, 2010). Dans cet item on demandait de faire "une croix dans la case où il y a plus d'éléments" à propos de la figure 4. Une enseignante consciencieuse pouvait donc croire que ses élèves de grande section devaient arriver à réussir un tel item. Or pour faire progresser les élèves vers une telle réussite, il fallait des activités quotidiennes et intenses de comptage systématique car l'enfant à développement typique n'arrive pas, à 5/6 ans, à maîtriser une comparaison comme celle de la figure 4.

Figure 4 – Un item des "Aides à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle"



Les observations sur les connaissances des enfants en début de CP ne peuvent pas simplement être attribuées à l'efficacité des apprentissages en maternelle. D'ailleurs, la comparaison avec l'Allemagne, où l'école maternelle n'est pas aussi systématique et organisée, suggère que les enfants allemands, d'âge comparable à celui des enfants français de fin de maternelle, maîtrisent aussi bien, voire mieux, certaines tâches numériques (Tazouti et al., 2011).

Les connaissances testées ne semblent concerner que des aspects "superficiels" du nombre (lecture, écriture) et le comptage un à un. Lorsque le comptage un à un n'est plus directement possible sur la ligne numérique lacunaire, comme pour le problème verbal $4 + 11$, les performances s'écartent à peine du hasard. A propos de l'évaluation 1997, Fayol (2002) avait déjà noté que les items d'écriture "ne permettent en rien de savoir si les enfants sont en mesure de se représenter les quantités correspondantes" (p. 45) et qu'il est "possible que la présence des nombres précédents et suivants lors du complètement facilite la récupération de l'écriture de ceux qui manquent ou que la transparence des règles d'élaboration de la suite des nombres soit suffisante pour que les enfants la repèrent et l'appliquent correctement aux items tests" (p. 47). La réussite aux items de complètement marque donc au mieux la capacité des élèves à identifier la logique de l'écriture décimale des nombres, ou à défaut leur mémorisation de l'écriture d'une suite de symboles. Plus généralement, on peut observer que l'évaluation n'éprouve pas la structure logico-arithmétique fondamentale d'itération numérique (Gréco, 1960) : un élève peut résoudre pratiquement toutes les questions (y compris les problèmes arithmétiques, vu le mode de réponse) sans avoir compris que le suivant d'un nombre s'obtient par l'ajout de 1 à ce nombre.

Cette critique de la superficialité des apprentissages en maternelle, en particulier du comptage-numérotage, a été largement développée par Brissiaud (Brissiaud, 2014a,b) qui en a fait la raison majeure des faibles performances des élèves français dans les comparaisons internationales. Ces réserves ont trouvé un écho dans les résultats de l'étude réalisée deux années plus tard au CE_2, sur des élèves différents mais contemporains de - et comparables à - ceux du CP 2011, qui suggère que les progrès observés en CP étaient superficiels ou/et artificiels. En effet, une évaluation comparable à celle effectuée en 1999 n'a nullement confirmé que la forte augmentation du niveau des acquis des élèves à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 (Le Cam et al., 2013) se traduisait par une augmentation à l'entrée au CE_2. Cela a conduit la DEPP à sous-titrer une nouvelle note d'information : *les progrès observés à l'entrée au CP entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés* (Andreu et al., 2014).

4 Conclusion

Les évaluations en début de CP confirment que les enfants ont acquis de bonnes connaissances relatives aux nombres à leur sortie de l'école maternelle. Ces acquisitions se sont probablement renforcées, possiblement après 2008. Néanmoins, des questions de méthode suggèrent que les évaluations surestiment quelque peu ces acquisitions et leur progrès entre 1997 et 2011. A la fois cette surestimation, une certaine "superficialité" des connaissances acquises, et une sous-estimation du progrès en CE_2 (due au changement - enseignants des classes évaluées vs. télécorrection - du mode de correction des évaluations), peuvent expliquer que l'amélioration au CP soit restée sans lendemain.

III Connaissance des tables d'addition et de multiplication

Dans la perspective de l'utilisation de plus en plus courante d'instruments de calcul électroniques, la notion d'estimation du résultat devient primordiale pour contrôler la plausibilité du résultat et, notamment, éviter certaines erreurs de saisie. Or on sait que l'estimation nécessite la coordination de deux sortes d'activités composantes, qualitativement différentes : (a) utiliser un jugement de proximité pour sélectionner les substituts appropriés des termes de l'opération (addition, multiplication,. . .) ; (b) opérer (additionner, multiplier,. . .) mentalement sur les substituts des termes de l'opération (cf. Case et Sowder (1990), pour l'addition). L'estimation suppose donc le calcul mental, notamment un accès aisé aux faits numériques élémentaires (les tables). Par exemple, si l'on veut connaître approximativement le coût de 8 objets à 6,95 euros l'un, un ingrédient fondamental de la procédure d'estimation est la connaissance de "8 fois 7".

Dans le domaine de la connaissance des tables (addition et multiplication de deux nombres entiers à un chiffre), il est important de distinguer une connaissance déclarative - savoir que "huit fois sept c'est cinquante-six" par exemple - de la connaissance procédurale - savoir comment faire pour retrouver le résultat - additionner répétitivement huit fois le nombre sept par exemple. La prise en compte de cette distinction dans les évaluations est difficile, même si on limite le temps de réponse. Cela parce que certaines procédures peuvent être exécutées rapidement et, éventuellement, automatiquement. Par exemple, les élèves ou personnes qui calculent "8 fois 7" par "7 fois 7 plus 7".

L'ancienne formulation de l'objectif - savoir "par cœur" [9] les tables - signifiait clairement connaître les calculs élémentaires de manière déclarative. La difficulté de vérification de cette connaissance déclarative a alors pu conduire à renoncer à l'évaluation des tables dans les ÉN jusqu'en 2002. Des tentatives d'éprouver la connaissance déclarative de la table d'addition ont ensuite été mises en œuvre dans les ÉN 2002 et 2003 en début de CE_2. En 2003 notamment, avec une durée limitée à cinq secondes pour chaque calcul, cinq groupes de quatre calculs ont ainsi été proposés :

- le 1er groupe testait des sommes de deux nombres inférieurs ou égaux à 5 ($3 + 4$, $4 + 5$, $2 + 4$ et $1 + 5$) ;
- le 2e des sommes inférieures ou égales à 10 d'un nombre supérieur ou égal à 5 et d'un nombre strictement inférieur à 5 ($7 + 2$; $6 + 3$; $5 + 4$; $8 + 2$) ;
- le 3e des sommes supérieures ou égales à 10 d'un nombre strictement inférieur à 5 et d'un nombre supérieur ou égal à 5 ($3 + 7$; $3 + 9$; $4 + 8$; $2+9$) ;
- le 4e des sommes dont l'un des termes est 10 ($10 + 7$; $4 + 10$; $10 + 3$; $6 + 10$) ;
- le 5e des sommes dont les deux termes sont supérieurs ou égaux à 5 ($6 + 5$; $7 + 8$; $6 + 7$; $8 + 9$).

Les résultats ne se rangent pas parfaitement en accord avec la taille des nombres puisque les cinq groupes ont respectivement conduit à 78,8 %, 81,7 %, 73,8 %, 83,2 % et 50,0 % de réussite, la réussite étant définie par 4 réponses correctes (sur 4). L'assertion selon laquelle cinq secondes ne permettraient pas "de reconstruire un résultat que l'on ne connaît pas" (cf., livret enseignant 2003, p. 126), manque de

9. On sait aujourd'hui que le cœur n'est pas le principal organe sollicité par la connaissance déclarative : ce seraient plutôt l'hippocampe pour la mémorisation déclarative et le gyrus angulaire, gauche pour les droitiers typiques, pour le stockage/récupération. Néanmoins, la plupart des cultures ont référé (antérieurement) à un organe non cérébral pour distinguer les connaissances déclaratives des connaissances que l'on reconstruit (consciemment) en mémoire : souvent c'est le cœur (en anglais, italien, espagnol, ..), mais en russe c'est la bouche. En français, on dit aussi savoir "sur le bout des doigts", tandis que les Allemands disent que le résultat arrive par l'extérieur (*auswendig*).

crédibilité. Des pédagogues comme Rightsel et Thornton (1985) précisaient par exemple que pour considérer qu'un fait d'addition est maîtrisé (connu "par cœur"), il faut une réponse en moins de deux secondes, et cela déjà en première année d'école. D'ailleurs, l'analyse des pourcentages de réussite suggère qu'au moins certains élèves, pour certains calculs, utilisent un sur-comptage dont on sait qu'il est ralenti lorsque le second terme est supérieur au premier et lent lorsque le nombre à sur-compter est grand :

– les sommes légèrement plus grandes du deuxième groupe, dont le second terme est systématiquement plus petit que le premier, sont légèrement mieux réussies que les sommes du premier groupe, dont le second terme est systématiquement plus grand que le premier ;
– les additions du deuxième groupe, dont le second terme est systématiquement plus petit que le premier, sont mieux réussies que les sommes du troisième groupe, dont le second terme est systématiquement plus grand que le premier ;
– les additions du groupe 5, où le nombre à sur-compter est toujours supérieur ou égal à 5 sont les moins bien réussies [10].

Par la suite, les tableaux 5 et 6 montrent que la durée de calcul a été réduite en début de CE_2 à quatre secondes pour les additions, ce qui est toujours trop long pour attester d'une connaissance déclarative, et à deux secondes pour les multiplications ; en début de $6^{ème}$, en revanche, la durée a été presque uniformément fixée à deux secondes.

Figure 5 – Pourcentages de réponses correctes, en durée limitée, à quelques faits des tables d'addition

Evaluation		Durée	9 + 9	8 + 7	5 + 6*	2 + 8*	9 + 4*
Niveau	Année						
Début CE2	2005	4s	90,4	82,4	90,8	95,1	90,5
	2006	4s	90,9	81,8	91,1	94,4	90,2
Début 6e	2005	2s	98,5	95,0	94,7	95,2	95,7
	2006	2s	98,1	94,4	95,0	95,7	95,6
	2008	2s	98,9	95,6	97,0	96,7	96,4

* : ces calculs sont posés oralement sous forme d'addition à trou en $6^{ème}$: $5 + ? = 11$; $2 + ? = 10$; $9 + ? = 13$

Pour les additions, on remarque d'abord la bonne stabilisation des résultats : de 2005 à 2006, les pourcentages de réussite, en général élevés, ne changent pas de plus de 1 %. Ensuite, en 2008 et en $6^{ème}$, ces pourcentages augmentent encore un peu : peut-être est-ce déjà une conséquence de leur évaluation. Ces pourcentages, déjà élevés en début de CE_2 (ex. : 95 % de réponses correctes à 2 + 8), ne traduisent toutefois pas nécessairement une connaissance déclarative : un élève sur-comptant 2 à 8 (dire : 9, 10), pour calculer 2 + 8, arrive facilement à reconstruire rapidement le résultat non connu par cœur. D'autant, on ne peut pas manquer de le remarquer, qu'on accordait 4 secondes de temps de calcul pour les additions

10. Le fait que les additions du quatrième groupe sont les mieux réussies ne contredit pas cette analyse du sur-comptage car l'addition de 10 relève plus d'une compréhension de la numération que d'un calcul.

(contre 2 secondes pour les multiplications). Lorsqu'un comptage un par un s'avère inefficace, pour 8 + 7 notamment, on voit que les élèves de CE_2 dépassent à peine 81 % de réussite, ce qui montre que presque 20 % d'entre eux non seulement ne connaissent pas de manière déclarative 8 + 7 mais aussi qu'ils ne disposent pas d'une procédure rapide pour retrouver le résultat, par exemple un passage de la dizaine : 8 + 7 = (8 + 2) + 5. Pour 9 + 9, l'augmentation de près de 8 % des réussites (à un niveau élevé) entre le CE_2 et la $6^{\text{ème}}$ montre qu'un double - certes difficile, mais on sait aussi, de longue date, que les doubles sont plus facilement mémorisés que les autres calculs - n'est pas connu de manière déclarative par presque 10 % des élèves en début de CE_2.

Figure 6 – Pourcentages de réponses correctes, en durée limitée, à quelques faits des tables de multiplication

Evaluation		Durée	3 calculs : 2 fois 3, 5 et 4*	3 calculs : 2 fois 7, 6 et 9*	3 calculs : 5 fois 3,5 et 2*	3 calculs : 5 fois 8, 10 et 7*	3 calculs**: 10 fois 2, 5 et 10*
Niveau	Année						
Début CE2	2005	2s	69,9	62,3	40,6	23,3	54,4
	2006	2s	70,0	63,4	39,7	23,0	53,0
Début 6e	Calculs		6 fois 8	9 fois 9	5 × ?=35	9 × ?=27	8 × ?=56
	2005	2s	69,4	87,8	81,4	75,0	54,4
	2006	2s	68,3	88,9	82,3	75,5	53,4
	2008	2s	71,4	90,7	83,5	76,9	56,5

* : le critère de réussite est 3 réponses correctes sur 3.
** : 3s pour chacun de ces 3 produits.

Pour les multiplications, le codage adopté dans les évaluations CE_2 ne permet pas vraiment une discussion de calculs particuliers. Ils montrent cependant qu'en début de CE_2, les tables de multiplications sont loin d'être acquises : même la table de 2, la plus simple, ne conduit pas à un pourcentage de réussite proche des 100 %, ce qui suggère que certains élèves n'ont pas fait le lien entre doubler et multiplier par 2. En $6^{\text{ème}}$, on n'atteint pas les pourcentages de réponse correcte obtenus pour les additions. Par exemple, pour 6 fois 8, on atteint environ 70 % de réponses correctes. Comme il existe des procédures rapides permettant de retrouver ce calcul précis en 2 secondes (qui peuvent être un peu plus dans les classes à défaut de contrôle rigoureux), il est probable que plus d'un tiers des élèves ne le connaissent pas par cur. D'ailleurs, pour tester la connaissance déclarative d'un produit (ex. : 7 fois 8 = 56), il vaut mieux le poser sous forme de multiplication à trou (Dans 56 combien de fois 8 ?) car aucune procédure simple de calcul ne permet de retrouver le résultat (pour mettre en uvre une procédure de calcul d'un produit il faut connaître les deux termes du produit) : on voit alors qu'à peine plus de 50 % des élèves ont une connaissance déclarative des produits les plus complexes (comme 7 fois 8).

En conclusion, ces évaluations montrent que les élèves, déjà en début de CE_2, semblent connaître les tables d'addition. Cette connaissance n'est cependant pas nécessairement une connaissance déclarative. Les évaluations, avec une tâche de vérification (dire si $9 + 7 = 15$, par exemple, est correcte ou non) et la mesure des temps de réponse, faites à la fin des années 1980 (Fischer, 1987) suggèrent que beaucoup de ces additions complexes ne sont pas connues de manière déclarative par une majorité d'élèves en fin d'école élémentaire. Cela est gênant car les soustractions (par exemple 16 - 7) ne peuvent être dérivées que des additions connues de manière déclarative (16 et 7 doivent activer $7 + 9 = 16$ pour en dériver 16 - 7).

Pour les multiplications, les produits complexes des tables ne semblent connus par cur, en début de 6ème, que par un peu plus de la moitié des élèves. Cela est, au moins localement, gênant pour la compréhension de l'inversion opératoire. A plus long terme, il est difficile de savoir si cela est vraiment gênant car, avec le temps, les calculs multiplicatifs non réactivés par la vie quotidienne s'oublient [11]. Ce phénomène d'oubli apparaît déjà entre le CM$_2$ et la 6ème et, encore plus nettement, chez les jeunes adultes participant aux journées de défense citoyennes (Fischer, 2012) : 9 fois $6 = 54$ n'étant pas activé dans leur mémoire déclarative, ces derniers jugent majoritairement que 54 cm divisé par 6 ne saurait être égal à 9 cm en vertu d'un théorème de parité erroné (la division d'un nombre pair par un nombre pair donne un nombre pair !).

Remarque didactique

Les techniques opératoires posées classiques, autrefois considérablement pratiquées dans les classes, conduisent secondairement à une réactivation des tables. Par exemple, la multiplication posée 64 Œ 39 aux ÉN 2001 en 6ème (item 11), réactive 4 multiplications et 6 additions élémentaires. Et cela dans des conditions favorisant la récupération du résultat en mémoire déclarative. En effet, la mémoire de travail étant aussi impliquée dans la gestion de l'écriture et des retenues, l'exécution d'une procédure reconstructive, fut-elle astucieuse (e.g., retrouver 9 fois 4 en doublant deux fois de suite), *a fortiori* lorsqu'elle ne l'est pas (e.g., addition de 4 neuf fois de suite), devient quasi impossible. Nous mettons en garde contre une conséquence pédagogique directe qui semble découler de la faible performance des élèves à certains de ces items de technique opératoire posée. Par exemple, à propos du faible (53,8 %) taux de réponse correcte à 64 Œ 39, il est suggéré d' "insister sur la mémorisation des tables", "plutôt que de proposer des exercices d'entraînement répétitifs portant sur des techniques expertes" (MEN, 2002, p.230). D'une part, comme nous venons de le suggérer, les techniques opératoires posées consolident en mémoire déclarative les tables [12] ; d'autre part, au-delà de certaines limites, les répétitions quotidiennes (Pirolli et Anderson, 1985), voire hebdomadaires (Chesné, 2014), ne sont plus d'une grande efficacité dans le domaine de la récupération des faits numériques.

IV La question du calcul posé

Les évaluations en fin de CM$_2$ à 20 ans d'intervalle (Rocher, 2008) montrent que la performance des élèves aux techniques opératoires posées [13] a considérablement baissé en deux décennies. L'addition (respectivement la multiplication) de la figure 7 a ainsi vu son pourcentage de réponses correctes baisser

11. Scolairement, ces connaissances sont sollicitées au collège en mathématiques, notamment par le calcul fractionnaire et le calcul algébrique.

12. Les calculs mentaux, légèrement plus complexes, peuvent avoir le même effet. Leur pratique plus intensive est, selon nous, nécessaire si la pratique des techniques opératoires posées décline, et utile en elle-même : dans les ÉN 2005 ou 2008, le calcul de ń 20 fois 18 ż par exemple na conduit quà 35,5 % ou 39,2 % de réussites en début de 6ème (Chesné, 2014, p.483).

13. Le présente partie ne se veut nullement une discussion générale de la question soulevée par le titre : elle présente seulement quelques données factuelles, souvent inédites, extraites des résultats des évaluations d'élèves analysées par la DEPP et pouvant contribuer à la discussion.

de 94 % (resp. 84 %) en 1987 à 83 % (resp. 68 %) en 2007 ; la division est passée de 78 % à 76 % entre 1999 et 2007. Cette chute des performances, et la moindre nécessité pratique de disposer de techniques manuelles efficaces pour des calculs que peu de gens ont à réaliser dans leur vie quotidienne, soulèvent la question de la poursuite de leur enseignement systématique. Les calculs posés figurant dans le livret-élève de ces évaluations (comme ceux de la figure 7), ou les calculs présentés en ligne mais que l'on demandait impérativement aux élèves de poser, des évaluations nationales en début de CE_2 et de 6e nous fournissent-ils des éléments d'aide à la décision ?

Figure 7 – Trois items de techniques opératoires posées de la comparaison entre 1987 (ou 1999 pour la division) et 2007 en fin de CM_2

19 786 + 215 + 3 291	247 x 36	74 | 14

D'abord, nous nous demandons si le fait de proposer l'opération déjà posée en colonnes pour les additions, soustractions et multiplications, et avec une "potence" pour la division (voir le tableau 7), favorise la production du résultat correct par rapport à un calcul en ligne. Un premier élément de réponse peut être trouvé dans l'ÉN 2001 en début 6e où le calcul 937 - 46 était à effectuer à la fois en ligne (item 14) et en colonnes (item 46). Pour ce dernier item, l'addition est présentée en colonnes dans le livret-élève : les élèves réussissent alors significativement mieux quand l'addition est posée en colonnes puisque leur pourcentage de réussite (87,1 %) dépasse de 9 points celui (77,8 %) obtenu dans le calcul en ligne. Près de 15 % des élèves réussissent le second calcul sans avoir réussi le premier, alors que seulement 6 % environ font l'inverse. Mais cette observation a incontestablement été favorisée par le fait que les élèves n'avaient pas à poser eux-mêmes le calcul.

En 2000 et 2004, la consigne pour les deux calculs 6,25 + 12,85 et 7,24 - 4,3, était "Pose et effectue dans le cadre", alors que, antérieurement, notamment l'année d'avant (en 1999), on demandait d'effectuer ces calculs en ligne. Ce changement dans le mode de calcul permet donc d'estimer l'apport spécifique de la pose explicite de l'opération par l'élève. Comme on peut le prévoir, l'impact du changement va être différent pour les deux calculs, pas tellement par suite du changement de l'opération arithmétique (addition *vs.* soustraction), mais à cause du fait que les parties décimales des deux nombres sont "de même longueur" dans 6,25 + 12,85 (2 chiffres derrière la virgule, ce qui permet une addition directe des chiffres de même rang), alors qu'elles ne le sont pas dans 7,24 - 4,3.

Pour l'addition, on observe une augmentation des réponses correctes de 4,6 points de 1999 à 2000. Cette estimation de l'augmentation paraît forte au vu des autres données : la moyenne de toutes les données pour le calcul en ligne (en 1999 et avant) est 77,7 %, ou 79,5 % si l'on exclut une valeur apparemment aberrante, alors que la moyenne des données pour le calcul posé (en 2000 et après) est 81,8 %. Le gain imputable au fait que les élèves n'aient pas à poser eux-mêmes l'opération semble donc faible, de l'ordre de 2 à 4 points.

Pour la soustraction, on observe une augmentation des réponses correctes de 15,3 points de 1999 à

2000. Cette estimation de l'augmentation paraît forte au vu des autres données : la moyenne de toutes les données pour le calcul en ligne (en 1999 et avant) est 49,0 %, alors que la moyenne pour le calcul posé (en 2000 et après) est 60,9 %. Le gain imputable à la pose de l'opération reste donc important, de l'ordre de 11 à 15 points. En outre, l'accroissement des réponses correctes entre 1999 et 2000 s'explique en partie par une baisse de la réponse 3,21 (traitement séparé des parties entières et décimales) de 10,5 % à 6,3 %, ainsi que par une baisse de la réponse 381 (traitement sans tenir compte des virgules) de 4 % à 1,9 %, entre 1999 et 2000. L'évolution de ces erreurs suggère que la pose de l'opération incite à tenir compte des virgules et, surtout, conduit, par défaut, à soustraire le nombre (ici égal à 0) de centièmes non explicités dans l'écriture 4,3 des quatre centièmes de 7,24 (et non pas à traiter les trois dixièmes de 4,3 comme des centièmes et à les soustraire des 24 centièmes de 7,24). Cette interprétation est renforcée ici par le fait que les deux nombres ont un seul chiffre dans la partie entière, ce qui rend valide un alignement par la gauche lors de la soustraction posée.

Cet exemple, particulier mais observé répétitivement sur des effectifs conséquents, montre que la pose d'une addition ou d'une soustraction conduit essentiellement à porter l'attention des élèves sur un problème spécifique aux décimaux, à savoir les cas où les parties décimales d'inégales longueur. En effet, dans les deux cas de l'addition 6,25 + 12,85 et de la soustraction 7,24 - 4,3 la pose améliore significativement le pourcentage de réponses correctes. Mais le gain est peu important pour l'addition avec des parties décimales d'égale longueur, alors qu'il est substantiel pour la soustraction avec des parties décimales d'inégale longueur[14] . En outre, entre ces deux calculs, celui qui a le plus de chances de se présenter dans la vie quotidienne, en tant qu'addition de deux prix par exemple, est 6,25 + 12,85. Or, pour ce calcul, la pose de l'addition n'apporte pas grand-chose en termes de gain (et poser l'addition sur un support papier par exemple dans une grande surface paraît complètement déphasé en 2015).

Ensuite, nous abordons une critique souvent faite aux techniques opératoires posées, à savoir qu'elles nuisent aux procédures spécifiques au calcul mental en favorisant une répétition mentale simple de la technique opératoire posée (possiblement par visualisation). A l'exception de la division, les techniques opératoires posées ont en comme caractéristique majeure d'imposer le début du calcul par la droite, avec une condition d'alignement des chiffres de même rang pour l'addition et la soustraction (ce qui autorise ensuite un travail exclusif sur les chiffres). Au contraire, le "vrai" calcul mental traite prioritairement les composantes quantitativement importantes. Cette critique est confortée par une observation double : d'abord la performance des filles aux techniques opératoires posées, supérieure à celle des garçons, conduit certainement ces dernières à mobiliser plus facilement ces techniques posées ; ensuite, la performance des garçons, supérieure à celle des filles en calcul mental (Fischer, 2004), suggère que la reprise mentale de la technique opératoire posée n'est pas la plus efficace. On voit que le non-enseignement des techniques opératoires posées pourrait avoir deux conséquences de valence différente pour les filles : d'un côté, elle les inciterait à produire du "vrai" calcul mental (conséquence valable aussi pour les garçons qui reproduisent la technique opératoire posée) ; mais, d'un autre côté, elle les priverait d'un des rares sous-domaines mathématiques où elles sont plus performantes que les garçons.

Concernant la supériorité de l'un des deux genres suivant que la technique est posée ou mentale,

14. Comme le gain pour l'addition se fait à un niveau de réussite déjà élevé (environ 80 % contre 50 % pour la soustraction), il est important de préciser qu'en termes d'intensité, la statistique Φ du gain peut être estimée inférieure à 0,05 pour l'addition, et supérieure à 0,10 pour la soustraction

nous renvoyons aux analyses plus complètes de Fischer (2004) et nous contentons ici de rapporter deux de ses observations illustrant notre propos. Dans l'ÉN 2000 en début de CE_2, la supériorité des garçons (42,6 % de réussite contre 32,1 % pour les filles) est la plus nette dans un calcul mental (54 - 9), alors que la supériorité des filles (59,4 % de réussite contre 52,7 % pour les garçons) est la plus nette dans une technique opératoire posée (une addition posée de 3 nombres à 3 chiffres). De même, dans l'ÉN 2000 en début de 6e, la supériorité des garçons (70,3 % de réussite contre 58,3 % pour les filles) est la plus nette dans un calcul mental (la moitié de 130), alors que la supériorité des filles (71,2 % de réussite contre 62,4 % pour les garçons) est la plus nette dans une technique opératoire posée (une multiplication posée : 45 Œ 19).

Plus systématiquement, nous avons dressé en Annexe D un tableau comparant les réussites selon le genre aux techniques opératoires posées en colonnes (les divisions avec potence sont donc exclues) dans les ÉN qui s'y prêtaient. Dans les colonnes de droite, on voit sur les 30 techniques opératoires posées en début de CE_2, la performance des filles est supérieure à celle des garçons dans 26 cas, et que sur les 31 techniques opératoires posées en début de 6e, la performance des filles est supérieure à celle des garçons dans 28,5 cas. Un test statistique de signe confirme donc très nettement la supériorité des filles dans les techniques opératoires posées en colonnes. Lorsqu'on sait que la performance moyenne des filles est plutôt inférieure à celle des garçons en mathématiques dans toutes les ÉN concernées (cf. les figure 1 et 2), et nettement inférieure dans les tâches de multiplication et division par 10, 100, 1 000 en CM_2 ou 6e (cf. la partie V.4), cette supériorité est d'autant plus intéressante à relever.

Enfin, une troisième question concerne directement les retenues. Le problème de la retenue provient du fait que l'on commence par traiter les puissances de 10 les plus petites. Il est typiquement généré par les additions, soustractions et multiplications posées en colonnes, mais éventuellement aussi en ligne. La différence de difficulté entre opération avec *vs.* sans retenue apparaît dès le début de l'apprentissage. Ainsi, l'évaluation 2011 réalisée par la DGESCO en fin de CE_1 montre que la soustraction posée sans retenue 786 - 254 est réussie par 76,6 % de l'ensemble des élèves, alors que la soustraction posée avec retenue 481 - 126 ne l'est que par 47,9 %. Plus finement, nous pouvons comparer les performances des filles et des garçons sur les calculs libres, c'est-à-dire des calculs non posés en colonnes dans le livret élève, mais que l'élève peut poser en colonnes (si ce n'est sur le livret tout au moins mentalement) ou calculer en ligne (en commençant par la droite). Notre hypothèse est que les filles, en utilisant davantage une technique s'apparentant à la technique opératoire posée en colonnes, vont davantage "souffrir" du problème de la retenue. Pour cela nous pouvons comparer les deux genres sur des calculs libres sans *vs.* avec retenue, et vérifier que la baisse de performance entre les deux types de calculs est plus grande chez les filles. Il est impossible de faire systématiquement et mécaniquement une telle comparaison sur toutes les données des évaluations, car les différences entre genres ne sont pas toujours rapportées et des techniques particulières (e.g., addition de 11, soustraction de 9,) peuvent interférer avec la question de la retenue. Néanmoins les quelques comparaisons que nous avons rassemblées dans l'Annexe E peuvent constituer un début de confirmation de notre hypothèse. Par exemple, au cours de l'ÉN 2002, en début de CE_2, les filles ont mieux réussi (à 63,4 %) la soustraction sans retenue 978 - 765 que les garçons (56,0 %), mais elles ont légèrement moins bien réussi (17,3 %) la soustraction avec retenue 45 - 27 que les garçons (19,0 %).

V Acquis des élèves en fin d'école primaire

En 2008, l'évaluation Cedre [15] réalisée pour la première fois en mathématiques en fin d'école primaire permet d'estimer qu'au moins 40 % des élèves ne maîtrisent ni les principes de numération ni les techniques opératoires dès que des nombres décimaux [16] sont en jeu. Les résultats présentés dans cette partie sont issus d'autres évaluations à grande échelle menées en France, et visent à localiser les difficultés des élèves relativement à leur connaissance des nombres décimaux : représentations, comparaison, traitements opératoires [17]. Nous avons rappelé dans l'introduction générale de ce rapport les minorations et les précautions contextuelles dont certaines de ces évaluations peuvent faire l'objet - en particulier sur les conditions de passation, l'absence d'information sur l'activité effective des élèves, le contenu et le format des items ou les modalités de correction. Mais nous prenons comme parti pris que la mise en regard de résultats issus d'évaluations différentes, si elle ne permet pas de comparaison temporelle du niveau des élèves - excepté lorsqu'il s'agit d'évaluations construites dans cet objectif -, favorise la constitution de faisceaux d'informations relativement à un domaine de connaissance donné, ici les nombres décimaux, et permet d'apprécier "globalement" son niveau d'acquisition par les élèves.

Après avoir rappelé ce qui concerne les nombres décimaux dans les programmes 2008 de l'école primaire, cette partie présente la réussite des élèves à différentes tâches proposées aux élèves en fin d'école primaire ou au début du collège. Ces tâches portent principalement sur l'écriture ou le changement d'écriture d'un nombre décimal, le placement d'un nombre sur la droite graduée, l'intercalation d'un nombre entre deux nombres décimaux ou l'encadrement d'un nombre décimal entre deux nombres entiers, la comparaison des nombres décimaux, la multiplication et la division d'un nombre décimal par 10, 100, 1 000, et enfin des calculs mentaux ou des opérations posées en ligne ou en colonnes. Des exemples d'items considérés comme représentatifs de chacun de ces types de tâches, sont présentés à titre illustratif, avec les taux de réussite correspondants [18] . Sauf cas particulier, l'écart entre les taux de réussite éducation prioritaire/hors éducation prioritaire est de l'ordre de 10 points. A l'issue de cette présentation, quelques questions institutionnelles et didactiques sont suggérées.

1 Les programmes scolaires 2008 (actuellement en vigueur)

Les programmes 2008 de l'école primaire fournissent "des repères pour l'organisation de la progressivité des apprentissages par les équipes pédagogiques." Ces repères sont donnés, année scolaire par année scolaire, et sont destinés à jouer auprès des enseignants un rôle de programmation annuelle au sein d'un même cycle, tout en rappelant les éléments du programme de l'année antérieure et en mettant en perspective ceux de l'année suivante.

Voici la programmation pour le CM_1 et le CM_2 pour ce qui concerne les nombres décimaux :

15. Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons, dont les items ne sont pas diffusés.
16. Cette partie traite essentiellement des nombres décimaux qui ne sont pas des nombres entiers.
17. Nous ne traitons pas ici l'utilisation des nombres décimaux dans des procédures de résolution de problèmes.
18. L'ensemble des données disponibles jusqu'en 2010 est consultable dans le travail de thèse de Chesné (2014).

2 Représentations d'un nombre décimal

A Les "grands nombres" (entiers)

Avant les nombres décimaux, les "grands nombres" entiers, c'est-à-dire ceux auxquels les élèves ne peuvent plus associer une collection d'objets, constituent également une difficulté pour une proportion importante d'élèves en fin d'école primaire. Ils se construisent en effet, tout comme les nombres décimaux, dans un processus de conceptualisation où la confiance dans l'écriture décimale d'un nombre et la compréhension de la valeur des chiffres qui le composent en fonction de leur position l'emportent sur une représentation matérielle d'une quantité. Les ÉN 2005 montrent qu'au moins 90 % des élèves, en éducation prioritaire comme hors éducation prioritaire, savent écrire un nombre entier inférieur à 1000 à leur entrée au CE_2. Ils sont tout aussi nombreux, à leur arrivée en sixième à savoir le faire pour un nombre entier inférieur à 10 000. Mais ce taux chute en moyenne d'environ 20 points dès qu'on dépasse 10 000, et de 30 points pour les élèves d'éducation prioritaire comme le montrent les items 52, 53 et 54 des ÉN 2005 à 2008. Autrement dit, un quart des élèves (respectivement un tiers) arrivant en sixième hors éducation prioritaire (respectivement en éducation prioritaire) ne savent pas écrire un "grand nombre". Ce constat conduit à questionner les stratégies d'enseignement (usage du tableau de numération, utilisation des expressions comme "unités de mille" ou "dizaines de mille"). Il interroge également le découpage actuel des programmes qui semble considérer 1 000 comme une étape importante de l'apprentissage (le programme de CE_1 va jusqu'à 999 tout en comprenant l'apprentissage des kg et des km) alors que la rupture nous semble davantage exister après 9 999, puisqu'aucun nouveau terme de groupement (comme dizaine, centaine ou millier) ni préfixe pour les unités de mesure des grandeurs n'existent pour les dizaines de milliers.

CM1	CM2
Fractions - Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. - Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.	**Fractions** - Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs. - Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. - Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.
Nombres décimaux - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie **décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème).** - **Savoir :** **. les repérer, les placer sur une droite graduée,** **. les comparer, les ranger,** . les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, . passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.	**Nombres décimaux** - Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème). - Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, . les comparer, les ranger, . produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... - Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.
Calcul **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers. - Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. - Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat. **Effectuer un calcul posé** - Addition et soustraction de deux nombres décimaux. - Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier. - Division euclidienne de deux entiers. - Division décimale de deux entiers. - Connaître quelques fonctionnalités de la calculatrice utiles pour effectuer une suite de calculs. **Problèmes** - Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.	**Calcul** **Calculer mentalement** - Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux. - Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000. **Effectuer un calcul posé** - Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux. - Division d'un nombre décimal par un nombre entier. - Utiliser sa calculatrice à bon escient. **Problèmes** - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.

Remarque : par la confusion entretenue autour du mot "fraction", notamment par l'absence de clarification entre un nombre décimal et ses différentes écritures, le statut des fractions n'apparaît pas de façon explicite. Cela a pour conséquence que les types de tâches proposées aux élèves en fin d'école primaire (par exemple, associer une écriture fractionnaire de dénominateur 2, 4 ou 5 à une écriture décimale ou placer un nombre décimal écrit sous forme fractionnaire sur une droite graduée) peuvent être très variables d'une école à l'autre, et provoquer des perturbations avec ce qui est attendu en sixième, dont le programme est plus précis sur cette question.

B Écritures d'un nombre décimal

Avant d'évoquer des questions liées à l'apprentissage des nombres décimaux, il est utile de rappeler la distinction qui existe entre un nombre et son écriture, ou plutôt, ses écritures. Autant cette précaution semble prise par la recherche et diffusée dans les pratiques des enseignants dans la construction des premiers nombres (entiers), autant quand on traite des nombres décimaux, la confusion est fréquente. Un nombre décimal a une écriture décimale parmi d'autres, une fraction (ou une écriture fractionnaire) peut être une écriture d'un nombre décimal ou non. Cet aspect dépasse le simple apprentissage de l'écriture décimale, inventée pour son aspect pratique dans les calculs, et touche le concept de nombre.

Figure 8 – Ecritures d'un nombre décimal

Tâche	ÉN CM2	ÉN 6e	Expérimentations
Dans la case D, écrivez dix-huit unités et trois centièmes (laisser 10 secondes) Dans la case E, écrivez vingt-cinq centièmes (laisser 10 secondes) Dans la case F, écrivez quatre dixièmes (laisser 10 secondes)	44,7 % (2010)*		
Entoure la fraction égale à 80,4 : $\frac{804}{100}$ $\frac{80}{4}$ $\frac{84}{10}$ $\frac{804}{10}$ $\frac{804}{1000}$		48,9 % (2008) 55,6 % (2004) (à comparer à 20 %)	
Entoure la fraction égale à 0,38** : $\frac{38}{10}$ $\frac{0,38}{100}$ $\frac{38}{100}$ $\frac{38}{1000}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{0}{38}$	42,1 % (2010)		38,7 % (PACEM 2011)
Entoure le nombre à virgule égal à $\frac{3}{10}$ 3,10 0,3 0,03 30,00 3,0 3,00	56,7 % (2011)		64,0 % (PACEM 2011)
$\frac{1}{4}$ = ? ***	27,0 % (2011)	26,9 % (2008)	27,3 % (PACEM 2011)

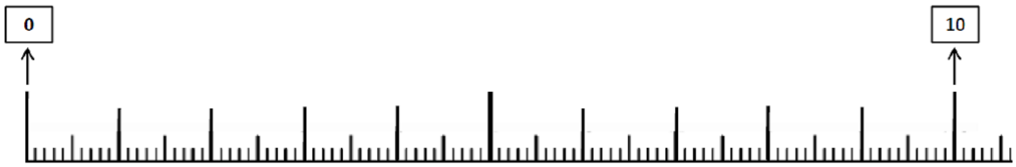
* : les consignes de correction stipulaient que les écritures correctes acceptées étaient 18,03 ; 0,25 ou 25/100 ; 0,4 ou 4/10.
** : le taux de réussite pour cet item et pour le suivant est à comparer à 16,7 % dans les ÉN CM_2. Dans le test PACEM, 4 réponses seulement étaient proposées aux élèves.
*** : cette tâche est présentée sous différentes formes selon les évaluations : production écrite dans l'ÉN CM_2, deux réponses égales à entourer dans l'ÉN 6e et QCM avec 4 réponses possibles dans le test PACEM.

On peut également mentionner les deux items 3 et 4 de l'ÉN 6e 1995 : si 86,8 % des élèves écrivent correctement en chiffres mille douze francs et trente centimes, seulement 40,4 % le font quand il s'agit de quarante huit francs et cinq centimes, alors que 50,8 % écrivent 48,5. Même si le contexte (remplir un chèque) peut apparaître comme discutable pour des élèves de 6e, l'écart entre les deux taux de réussite et la fréquence[19] de la réponse 48,5 suggèrent un déficit de compréhension par les élèves de l'écriture décimale, voire des nombres décimaux eux-mêmes.

19. Dans le contexte d'une évaluation standardisée. On peut en effet penser qu'une partie des élèves qui ont écrit 48,5 et à qui on proposerait 48,05 accepteraient et comprendraient la bonne réponse.

C Placement sur une demi-droite graduée

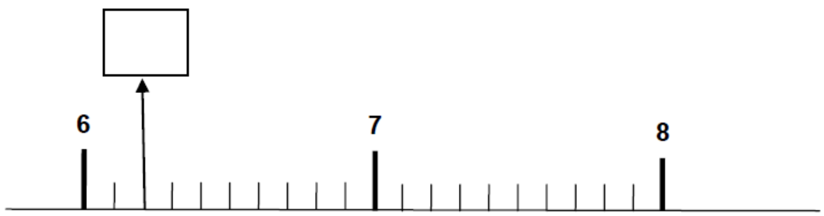
Figure 9 – Placement sur une demi-droite graduée



Place sur la droite graduée ci-dessus les cinq nombres suivants et indique exactement la graduation correspondante avec une flèche : 2,6 – 1 – 6,2 – 8,9 – 0,5

(a) Taux de réussite : 82,0 % (ÉN CM$_2$ 2010)

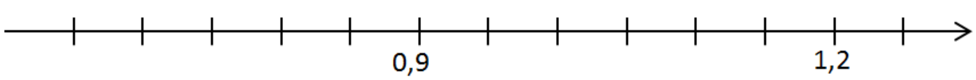
Dans la case, écris le nombre qui correspond à la graduation donnée.



(b) Taux de réussite : 85,0 % (ÉN CM$_2$ 2012) ; 80,4 % en RRS.

Ces deux premiers résultats ne renseignent pas vraiment sur le degré de conceptualisation qu'ont les élèves sur les nombres décimaux car les tâches sont trop proches d'un repérage sur la règle graduée en cm et en mm ("1 seul chiffre dans la partie décimale"). Quant aux deux suivants (figure 10), le fait de graduer de 0,05 en 0,05 et non plus de 0,1 en 0,1 constitue à lui seul une difficulté importante puisque les deux tiers des élèves sont en échec en début de 5e.

Figure 10 – Cas plus difficile



D Comparaison des nombres décimaux

Environ un tiers des élèves ne conçoivent pas qu'il existe un nombre décimal (au moins) entre deux autres, ou ne sont pas capables d'en exhiber un. Ce résultat ne semble pas particulier aux élèves français, puisque McIntosh et al. (1997) montrent, dans une étude internationale principalement menée en Australie et aux Etats-Unis, que la moitié environ des élèves de 12 ans répondent [20] qu'il n'y a aucun nombre décimal

20. A l'entrée en 6e, une telle tâche peut apparaître comme une rupture de contrat didactique pour des élèves habitués à écrire des suites de nombre décimaux telles que : 1,52 ; 1,53 ; 1,54 ; etc.

entre 1,52 et 1,53. Ce que montrent les évaluations nationales françaises, c'est que les élèves peuvent être très nombreux à savoir écrire "en général" un nombre entre deux nombres donnés (jusqu'à 95 % pour 73,34 et 73,81). Mais pour pratiquement tous les items [21] où l'écart entre ces deux nombres est égal à 0,1 (comme pour 82,5 et 82,6), le taux de réussite est entre 60 % et 70 %. Lorsqu'il s'agit d'encadrer un nombre décimal par deux nombres entiers consécutifs, le pourcentage est encore plus bas, descendant même à 18,3 % lorsque l'écriture du nombre décimal est fractionnaire 385/10.

Concernant la comparaison de deux nombres décimaux, leur assimilation aux nombres entiers - et même simplement à leur écriture - suffit pour dire que 73,34 $<$ 73,81, mais fait obstacle dans le cas de la comparaison de deux nombres comme 150,65 et 150,7 (ainsi que dans celui de l'intercalation d'un nombre entre deux autres comme 12,5 et 12,6 puisque par définition il n'existe pas de nombre entier entre deux nombres entiers consécutifs). Les évaluations nationales confirment donc les résultats issus de nombreux travaux de recherche menés à l'étranger (Baturo et Cooper, 1995; Steinle, 2004; Roche et Clarke, 2006). Stacey (2005) établit ainsi jusqu'à 11 règles erronées ou "conceptions erronées" (*misconceptions*) qui mènent à des comparaisons incorrectes de décimaux.

Figure 11 – Comparaison des nombres décimaux dans les ÉN de 6e

	ÉN 6e	
Tâche	Taux de réussite	Année
Entoure le plus petit des nombres* : 150,65 150,7	63,5 % 64,2 %	1991 1990
Ecris un nombre compris entre 82,5 et 82,6	64,8 %	1990
Ecris un nombre compris entre 12,5 et 12,6	69,6 % 70,8 % 65,3 %	2004 2000 1996
Encadre 895,53 par deux entiers consécutifs	34,5 %	2008
Encadre 385/10 par deux entiers consécutifs	18,3 %	2008
Encadre 12 + 5/100 par deux entiers consécutifs	22,7 %	2008

* : le taux de réussite est à comparer à 50 %

L'ensemble de ces résultats, quoique anciens, suggèrent de donner davantage de sens à la compréhension des nombres décimaux et non simplement à leur écriture, et de s'interroger sur leur place et leur mise en uvre dans les programmes.

21. On se réfèrera pour cela aux tableaux A-36 et A-37 de la thèse de Chesné (2014).

E Multiplication et division par 10, 100, 1 000

La multiplication par 10, 100, d'un nombre entier n'est pas une difficulté pour les élèves puisque la procédure consistant à ajouter des zéros permet de donner un résultat correct ; les taux de réussite aux items correspondants sont alors supérieurs à 90 %. En revanche, multiplier par 10, 100, un nombre décimal dont la partie décimale comporte autant ou plus de chiffres que de zéros dans 10, 100, est une difficulté pour un tiers des élèves (11,39 $\times$ 10 ou 3,256 $\times$ 1 000) et le faire quand ce n'est pas le cas (35,2 $\times$ 100) l'est pour environ un élève sur deux, avec une tendance à la baisse des résultats. Même si certains élèves éprouvent encore le besoin de poser des opérations pour effectuer ces calculs, le décalage de la virgule, le recours à un tableau de numération, sont les principales procédures utilisées par les élèves [22]. Cet enseignement précoce et exclusif de techniques aux dépens d'un travail sur le sens ne semble pas favoriser l'acquisition de compétences relatives à la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100 ou 1 000.

Figure 12 – Multiplication et division par 10, 100, 1 000

Tâche	ÉN CM2	ÉN 6e	Expérimentations
11,39 × 10	67,1 % (2012)		
7,14 × 100	65,1 % (2007) 64,5 % (1999)		37,9 % (PRE 2014) 37,4 % (PACEM 2011)
3,256 × 1000	63,9 % (2012)		
35,2 × 100		31,6 % (2008) 47,3 % (2001) 59,3 % (1994)	
3,72 × 1000			31,8 % (PRE 2014) 29,8 % (PACEM 2011)
37 : 10*		41,6 % (2003) 56,0 % (2002)	
67 : 100			27,8 % (PACEM 2011)
16,2 : 10			36,4 % (PRE 2014) 28,5 % (PACEM 2011)

* : ce calcul était donné oralement.

Les filles réussissent nettement moins bien ce type de tâches que les garçons, l'écart en leur défaveur est environ 8 points aux ÉN 2005 et 2008. Les écarts des résultats éducation prioritaire/ hors éducation prioritaire sont également plus marqués qu'en moyenne (16,1 points pour l'item 35,2 $\times$ 100). Le calcul 676 : 100 (item 8), donné à l'oral à l'ÉN 2002 à l'entrée en 5e, a été réussi à 57,9 % avec un écart EP/hors EP de 23,3 points. Les travaux de Peltier-Barbier et al. (2004) suggèrent que les contraintes spécifiques qui pèsent sur les enseignants en éducation prioritaire peuvent les conduire à adopter une logique de réussite à court terme aux dépens d'un réel apprentissage des élèves. L'application de "recettes" non fondées sur le sens des nombres et des opérations pourrait alors expliquer les résultats obtenus.

22. C'est ce que révèlent les productions numérisées des élèves pour la correction de certaines évaluations.

F Addition/soustraction et multiplication/division

Ce paragraphe propose une analyse plus systématique, que l'analyse de la partie 4, des tâches de calcul sur les nombres décimaux, pour les quatre opérations. Nous avons parfois choisi de mentionner des opérations sur des nombres entiers pour souligner des écarts de réussite entre différents items. Nous rappelons qu'un "vrai" calcul mental s'effectue avec des procédures spécifiques, distinctes des algorithmes standards utilisés pour le calcul posé. Par exemple, pour l'addition 5,2 + 2,8 on pourra faire 5 + 2 puis 2 dixièmes + 8 dixièmes ou 5,2 + 2 + 0,8 plutôt que 2 + 8 =10, "j'écris 0 et je retiens 1", 5 + 2 + 1 = 8, et "j'abaisse la virgule" pour passer de 80 à 8,0. Pour la multiplication 1,5 × 4, on pourra faire 2 fois 1,5 = 3 puis 2 fois 3 = 6 plutôt que "4 fois 5 = 20 et je retiens 2 ; 4 fois 1 = 4 et 4 + 2 = 6" avant de placer la virgule correctement pour obtenir 6,0. Mais, comme il l'a été dit dans la partie 4, pour effectuer un calcul mental, certains élèves peuvent aussi "poser mentalement un calcul écrit", ce qui impose une mémorisation des calculs intermédiaires, et augmente les sources d'erreurs (par exemple sur le traitement de la virgule), d'autant plus quand le calcul est donné oralement, et donc quand aucun repère visuel n'est possible. Cette stratégie de "calcul posé mental" trouve ses limites quand le temps de réponse est court ou/et que les nombres en jeu ne s'y prêtent plus (par exemple : 58,34 + 9,99 ou 35 × 99). Enfin, nous rappelons que la multiplication des nombres décimaux a été absente des programmes de l'école primaire de 1995 à 2008.

a) Addition et soustraction

Les taux de réussite aux calculs mentaux sont peu élevés, voire très peu élevés, ce qu'on peut sans doute attribuer à un manque de pratique régulière pour certains élèves. Un défaut de mémorisation des tables, le traitement séparé des parties entières et des parties décimales, l'absence de prise en compte de la virgule (52 + 28 au lieu de 5,2 + 2,8) ou au contraire une volonté "d'harmonisation des écritures" (3,8 - 1,5 au lieu de 38 - 1,5), ce qui pourrait provenir des opérations posées en colonnes effectuées mentalement, constituent des sources d'erreurs identifiées. A noter que ces difficultés semblent persister en 6e puisque les calculs 2,3 + 4,12 et 15,4 - 1,7 sont respectivement réussis par 34,7 % et 34,6 % des élèves en 2002 à l'ÉN à l'entrée en 5e.

Tableau 1 – Addition et soustraction : calculs mentaux

Tâche	ÉN 6e	Expérimentations
5,2 + 2,8		35,2 % (PRE 2014)
5,2 + 13 + 2,8		41,2 % (PACEM 2011)
38 - 1,5		31,0 % (PRE 2014) 29,8 % (PACEM 2011)
1,7 + 2,3*	61,3 % (2003) 64,0 % (2002)	

* : ce calcul, au contraire des trois premiers écrits en lignes, était donné oralement.

Environ 80 % des élèves en fin de CM_2 savent effectuer une addition ou une soustraction posée, sur des nombres entiers de 3 à 4 chiffres, avec retenues, avec une diminution importante des pourcentages de réussite pour les opérations portant sur des nombres décimaux. De plus, la variation des scores selon les nombres mis en jeu dans les opérations incite à penser que c'est autant la maîtrise des nombres décimaux que celle de la technique opératoire qui doit être mise en cause Chesné (2010).

Tableau 2 – Addition et soustraction : calculs posés

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
154,8 + 36,57	66,9 % (2010)	65,5 % (PRE CM_2 2014) 70,3 % (PACEM 2011)
208 + 13,75	63,5 % (2011)	
164,8 + 26,57	80,9 % (2012)	
56,09 + 22,4+ 233,25	74,8 % (2007) 84,3 % (1987)	
138,85 - 49,2	51,6 % (2010)	51,7 % (PRE 2014) 52,9 % (PACEM 2011)
56,73 - 7,02	73,9 % (2011)	
7,24 - 4,3	75,4 % (2012)	
4ă700 - 2ă789,7	49,5 % (2007) 71,7 % (1987)	

NB : tous les calculs sont donnés en ligne avec consigne de les poser.

Les erreurs des élèves dans les additions posées sont de différentes natures (erreurs de tables, de retenue, d'alignement, de placement ou "d'oubli" de la virgule pour l'addition). On retrouve ces erreurs, dans les soustractions posées, avec en outre une procédure qui consiste à systématiquement retirer le plus petit chiffre du plus grand chiffre, et une autre, qui provient d'une erreur de comparaison des nombres : par exemple, poser 2 789,7 - 4 700 au lieu de 4 700 - 2 789,7 avec à suivre une erreur d'alignement. Face à ces résultats, on peut s'interroger sur la durée actuelle du temps scolaire consacrée au calcul posé, au calcul mental et en particulier à l'articulation des procédures personnelles et des algorithmes standards, dans une double perspective de la maîtrise de la connaissance des nombres et du calcul.

b) Multiplication

Les erreurs identifiées pour les multiplications peuvent être catégorisées comme pour l'addition : erreurs de tables, en particulier celles de 7 et 8 (ce qui expliquerait la différence des taux de réussite entre 4,28 $\times$ 3,5 et 16,25 $\times$ 2,03), de retenue, d'alignement, de placement ou "d'oubli" de la virgule. On peut également faire l'hypothèse supplémentaire pour certains élèves d'une surcharge cognitive due à la fois à la combinaison et au défaut de rappel immédiat des résultats des tables, de multiplication et d'addition. Par ailleurs, la faible réussite globale des élèves aux items portant sur les multiplications posées avec des nombres décimaux interroge la pertinence didactique, mais aussi l'utilité sociale de l'enseignement de ce type de tâches.

Tableau 3 – Multiplication : calculs mentaux

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
1,5 × 4	54,0 % (2010)	65,5 % (PRE 2014) 70,3 % (PACEM 2011)
8,3 × 5	54,6 % (2011)	45,1 % (PRE 2014) 34,6 % (PACEM 2011)
62 × 0,5		17,5 % (PACEM 2011)

Tableau 4 – Multiplication : calculs posés

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
39 × 57	58,3 % (2010)	55,0 % (PRE 2014) 48,7 % (PACEM 2011)
14 × 35	80,3 % (2011)	
247 × 36	67,8 % (2007) 83,7 % (1987)	
24,3 × 6	59,3 % (2010)	56,4 % (PACEM 2011)
46,3 × 9	55,5 % (2011)	
27,5 × 23	57,7 % (2012)	
4,28 × 3,5	53,6 % (1990)	19,4 % (PACEM 2011)
16,25 ×2,03*	44,4 % (2012)	

* : ce calcul faisait partie de l'ÉN à l'entrée en 5e en 2002 avec un taux de réussite de 43,6 %. Une autre multiplication figurait dans cette ÉN (9,74 × 3,5) réussie par 37,3 % des élèves.

c) Division

Les deux premières divisions ont un quotient exact entier, alors que pour les suivantes, le quotient est décimal. Comme pour la multiplication, le taux de réussite de l'item 3978 : 13 de l'ÉN 2002 à l'entrée en 5e (40,4 %) semble indiquer que la technique opératoire de la division ne s'améliore pas en 6e : faute d'être réellement pratiquée ?

Tableau 5 – Division : calculs posés

Tâche	ÉN CM_2	Expérimentations
544 :17 :00	50,4 % (2010)	47,1 % (PACEM 2011) 56,7 % (PRE 2014)
738 :06 :00	77,0 % (2011)	
276 :08 :00	34,1 % (2010)	20,7 % (PACEM 2011)
238ă : 4	43,2 % (2011)	
786ă : 5	63,1 % (2012)	
74ă : 8	54,9 % (2012)	

Conclusion

L'ensemble des résultats présentés confirme et complète les difficultés mises en avant par la recherche en didactique des mathématiques sur l'apprentissage des nombres décimaux (Brousseau, 1980, 1981; Grisvard et Léonard, 1981, 1983; Perrin-Glorian, 1986; Bolon, 1992, 1996; Roditi, 2001, 2007; Chesné, 2014), comme par exemple le prolongement de règles-en-actes issues du traitement des nombres entiers. Un certain nombre d'élèves se présentent donc à l'entrée au collège comme des "experts apparents" (Roche et Clarke, 2006), pouvant réussir certaines tâches (en ajoutant par exemple des zéros dans la partie décimale pour comparer deux nombres décimaux afin d'avoir le même nombre de chiffres), mais cette réussite opérationnelle masque une conceptualisation déficiente des nombres décimaux. Autrement dit, les résultats des évaluations nationales montrent qu'il existe un déficit de construction des nombres décimaux chez une proportion importante des élèves et qu'une réussite à certains items ne peut éventuellement traduire qu'un degré apparent de conceptualisation des nombres décimaux, voire des nombres entiers. Même si les matériaux d'analyse dont nous disposons ne sont pas tous récents, et dans l'attente des résultats du Cedre 2014, il nous semble très probable [23] que les acquis des élèves en 2015, sur ce thème précis des nombres décimaux, ne diffèrent pas sensiblement de ceux de leurs aînés. Nous suggérons donc qu'il est urgent de répondre à un certain nombre de questions, institutionnelles (Comment et quand introduire les nombres décimaux ? Quelle place accorder au calcul posé ?) et didactiques (sur les changements de registres, sur la demi-droite graduée, sur l'articulation entre calcul - mental et posé - et numération, notamment sur la multiplication).

23. Sans aborder les nombres décimaux, l'évaluation menée à l'entrée au CE_2 en 2013, dont les résultats sont stables par rapport à ceux de 1999, étaye cette hypothèse.

Annexes

Annexe A Liste des documents de la DEPP consultés

- Évaluation CE_2 - $6^{ème}$, Résultats nationaux, septembre 1994, Éducation & Formations, n°50, 1995, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris
- Évaluation CE_2 - $6^{ème}$, Résultats nationaux, septembre 1995, Éducation & Formations, n°65, 1996, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris
- Évaluation CE_2 - $6^{ème}$, Résultats nationaux, septembre 1996, Éducation & Formations, n°79, 1997, D.E. P., Ministère de l'Éducation nationale, Paris
- Évaluation CE_2 - $6^{ème}$, Résultats nationaux, septembre 1997, Éducation & Formations, n°100, 1998, D.P.D., Ministère de l'Éducation nationale, Paris
- Évaluation CE_2 - $6^{ème}$, Résultats nationaux, septembre 1998, Éducation & Formations, n°111, 1999, D.P.D., Ministère de l'Éducation nationale, Paris

A partir de 1999, les publications des résultats des évaluations CE_2 sixième sont disponibles en ligne : http ://cisad.pleiade.education.fr/eval/

Annexe B : Principaux sigles

CE1	Cours élémentaire première année
CE2	Cours élémentaire deuxième année
Cedre	Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon.
CP	Cours préparatoire
CM1	Cours moyen première année
CM2	Cours moyen deuxième année
CSP	Catégorie socio-professionnelle
DEPP*	Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance
DGESCO	Direction générale de l'enseignement scolaire
Éclair	Écoles, collèges, lycées pour l'ambition, l'innovation et la réussite
ÉN	évaluation nationale
HCE	Haut conseil de l'éducation
JDC	Journée défense et citoyenneté
Lolf	Loi organique relative aux lois de finances (1er août 2001)
MEN	Ministère de l'éducation nationale
PACEM	Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques
PCS	Professions et catégories socioprofessionnelles
PRE	Programmes de réussite éducative
QCM	Question à choix multiples
RAR	Réseaux ambition réussite
REP	Réseau d'éducation prioritaire
RRS	Réseau de réussite scolaire
ZEP	Zone d'éducation prioritaire

* : A partir de 2006.

Annexe C Scores moyens (sur 100) dans les quatre domaines mathématiques en début de CE2

ÉN CE2 Année	Géométrie	Mesures	Travaux Numériques	Problèmes numériques	Numération écrite et orale	Problèmes et traitement de données
1994	70,6	58,9	57,8	59,4		
1995	78,8	65,4	63,5	62,5		
1996	77,5	59,1	68,3	63,4		
1997	78,3	68,1	70	68,4		
1998	74,2	68,7	68,2	65,9		
1999	71,8	67,4	64,1	58,6		
2000	71,4	69,6	65,7	56,1		
2001	74,8	65,5	69,9	64,9		
2002	74,8	62,3	64,4		70,3	59,9
2003	76,6	62,1	61,5		69,3	56,4
2004	84,8	76,6	61,3		76,5	51,1
2005	70,1	67,4	71,4(1)	66,7(2)	74,6(3)	
2006	68,55	65,3	71,1(1)	65,5(2)	74,2(3)	
Moyenne	**74,8**	**65,9**	**65,9**	**63,1**	**73**	**55,8**

(1) Calcul

(2) Exploitation de données numériques

(3) Connaissance des entiers naturels

Sources : Évaluations nationales à l'entrée en CE_2 de 1994 à 2006 (DEPP)

Annexe D Comparaison, en fonction du genre (filles = F ; garçons = G), des pourcentages de réussite dans les techniques opératoires posées en colonnes[1]

Référence **CE2**	Nombre d'opérations posées	N° Items	Nature	Nombre de F > G	Nombre de G > F
2000	3[2] 2[3]	59, 60, 61 57, 58	3ad 2ad	3 2	0 0
2001	3[2] 2[3]	58, 59, 60 56, 57	3ad 2ad	2 2	1 0
2002	4[2] 2[3]	51, 52, 53, 58 50, 51	3ad, 1mu 2ad	3 2	1 0
2003	4[2]	51, 52, 53, 58	3ad, 1mu	3	1
2004	4[2] 2[3]	59, 60, 61, 65 57, 58	3ad, 1mu 2ad	3 2	1 0
2005	4[2]	20, 21, 22, 23	4ad	4	0
6e					
2000	5[2]	13, 14, 15, 24, 25	2ad, 1 so, 2mu	4	1
2001	4[2]	10, 11, 46, 47	1ad, 1mu, 2so	4	0
2002	4[3]	48, 49, 76, 77	2ad, 2so	4	0
2003	4[3]	49, 50, 77, 78	2ad, 2so	4	0
2004	5[2] 2[3]	14, 15, 16, 25, 56 19, 20	2ad, 1so, 2mu 1ad, 1so	4 2	1 0
2005	4[2] 3[3]	15, 16, 28, 29 17, 18, 30	1ad, 1so, 2mu 1ad, 1so, 1mu	3,5 3	0,5 0

[1] Les divisions (potence) ne sont pas considérées comme posées en colonnes.

[2] Les opérations sont posées, en colonnes, dans le cahier de l'élève.

[3] Les opérations ne sont pas posées, mais les consignes demandent impérativement aux élèves de les poser (en 6e on fournit un cadre, mais pas en CE2).

Lecture : en 2002, au CE2, la première ligne indique que les opérations posées en colonnes dans le cahier de l'élève sont trois additions et une multiplication : le score des filles est supérieur à celui des garçons auxtrois additions, mais inférieur à la multiplication ; sur la seconde ligne, on peut lire que le score des filles est supérieur à celui des garçons aux deux additions que les élèves devaient poser et effectuer.

Les couleurs, dans la dernière colonne, permettent de déterminer la nature de l'opération pour laquelle les Garçons ont une performance moyenne supérieure à celle des Filles (0,5 correspond à une égalité) ; en revanche, les numéros des items n'ont qu'une fonction de vérification.

Sources : Évaluations nationales à l'entrée en CE2 et en 6e de 2000 à 2005 (DEPP)

Annexe E Comparaison Filles-Garçons* sur quelques calculs "avec *vs.* sans retenue"

Référence CE2	Item	Pourcentage de réponses correctes des filles	Pourcentage de réponses correctes des garçons	Différence filles	Différence garçons	Pourcentage de baisse filles	Pourcentage de baisse garçons
2000	978-765	63,2	59,2	44,6	38,3	70,65	64,78
	45-27	18,6	20,9				
2001	36 + 11	78,9	79,4	16,6	13,0	21,04	16,37
	45 + 15	62,3	66,4				
	398-135	66,6	59,5	47,1	39,9	70,72	67,06
	52-38	19,5	19,6				
	21 × 3	58,1	56,7	10,5	9,1	18,07	16,05
	26 × 2	47,6	47,6				
2002	978-765	63,4	56,0	46,1	37,0	72,71	66,07
	45-27	17,3	19,0				
	978-765	63,4	56,0	52,0	43,6	82,02	77,86
	474-36	11,4	12,4				
2003	978-765	53,9	51,6	40,9	34,6	75,88	67,05
	45-27	13,0	17,0				
	978-765	53,9	51,6	45,7	40,4	84,79	78,29
	474-36	8,2	11,2				
2004	978-765	57,6	53,6	43,8	36,1	76,04	67,35
	45-27	13,8	17,5				

* Nous considérons que les filles et les garçons sont également représentés dans l'échantillon pour le calcul de certains pourcentages.

Lecture : Au cours de l'ÉN 2000, en début de CE2, 63,2 % des filles ont réussi l'item sans retenue 978 ×765 et 18,6 % l'item avec retenue 45×27, soit une différence des pourcentages de réussite de 44,6 % et une baisse de 70,65 % du premier au second ; pour les garçons, à la fois la différence (38,3 %) et la baisse (64,8 %) sont inférieures à celles des filles.
Sources : Évaluations nationales à l'entrée en CE2 de 2000 à 2004 (DEPP)

Bibliographie

Andreu, S., M. Le Cam, et T. Rocher (2014). Évolution des acquis en début de ce2 entre 1999 et 2013 : les progrès observés à l'entrée au cp entre 1997 et 2011 ne sont pas confirmés. *Note d'information - DEPP 19*.

Baturo, A. et T. Cooper (1995). Strategies for comparing decimal numbers with the same whole-number part. In N. T. University et N. T. Darwin (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual Conference of The Mathematics Education Research Group of Australia*.

Bolon, J. (1992). L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N - IREM de Grenoble 52*, 49–79.

Bolon, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de lenseignement des décimaux à la charnière école - collège.* Thèse de doctorat, Université Paris 5.

Brissiaud, R. (2014a). Pourquoi l'école a-t-elle enseigné le comptage-numérotage pendant près de 30 années ? *CFEM*.

Brissiaud, R. (2014b). Vers la fin de la confusion entre le nombre et la quantité représentée par une collection de numéros ? *CFEM*.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques - Grenoble : La Pensée Sauvage 1*(1), 11–59.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques - Grenoble : La Pensée Sauvage 2*(1), 37–127.

Case, R. et J. T. Sowder (1990). The development of computational estimation : A neo-piagetian analysis. *Cognition and Instruction 7*, 79–104.

Chesné, J.-F. (2010). Les acquis des élèves en calcul à l'issue de l'école primaire. *Revue Education et formations 79*, 21–27.

Chesné, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation des enseignants centrée sur le calcul mental.* Ph. D. thesis, Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot.

Chollet-Remvikos, P. et J. Levasseur (2004). Avant et après les vacances, évolution des acquis des élèves : Evaluation en fin de ce1 et début de ce2 - evaluation en fin de cm2 et début de sixième. (dossier n.158). *Vanves : MENESR (DEP) 158*.

DGESCO (2011). Evaluation ce1 2011.

Fayol, M. (2002). Épreuves numériques. In J.-p. J. Colmant et F. Murat (Eds.), *Études réalisées à partir du panel d'écoliers recrutés en 1997*, pp. 45–48. MEN : PDP.

Fischer, J.-P. (1987). L'automatisation des calculs élémentaires à l'école. *Revue Française de Pédagogie 80*, 17–24.

Fischer, J.-P. (2004). Les différences cognitives entre sexes : une autre approche et d'autres observations. *Pratiques psychologiques 10*(4), 401–413.

Fischer, J.-P. (2012). Que sont nos tables devenues ? *Psychologie & Éducation 4*, 97–109.

Fischer, J.-P. (2013). Digit reversal in children's writing : a simple theory and its empirical validation. *Journal of Experimental Child Psychology 115*, 356–370.

Gréco, P. (1960). Recherches sur quelques formes d'inférences arithmétiques et sur la compréhension de l'itération numérique chez l'enfant. In J. B. G. Gréco, S. Papert, et J. Piaget (Eds.), *Problèmes de la construction du nombre*, pp. 149–213. Paris : PUF.

Grisvard, C. et F. Léonard (1981). Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P 327*, 47–60.

Grisvard, C. et F. Léonard (1983). Résurgences de règles implicites dans la comparaison des nombres décimaux positifs. *Bulletin de l'A.P.M.E.P 340*, 450–459.

HCE (2011). Les indicateurs relatifs aux acquis des élèves : Bilan des résultats de l'École.

Le Cam, M., T. Rocher, et I. Verlet (2013). Forte augmentation du niveau des acquis des élèves à l'entrée au cp entre 1997 et 2011. *Note d'information - DEPP 13.19*.

McIntosh, A., B. Reys, R. Reys, J. Bana, et B. Farrell (1997). *Number sense in school mathematics : Student performance in four countries*. Perth : MASTEC, Edith Cowan University.

MEN (2002). Évaluations ce2-sixième : Repères nationaux septembre 2001. Technical report, Vanves : Ministère de l'Education Nationale, Direction de la Programmation & du Développement.

MEN-DGESCO (2010). Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle.

Peltier-Barbier, M.-L. et al. (2004). *Dur d'enseigner en ZEP. Analyse des pratiques de professeurs d'école enseignant les mathématiques en réseaux d'éducation prioritaire*. La Pensée sauvage, Editions.

Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de cm2 et de collège. *Petit x, 10*, 5–29.

Pirolli, P.-L. et J.-R. Anderson (1985). The role of practice in fact retrieval. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition 11*(136-153).

Rightsel, P.-S. et C.-A. Thornton (1985). 72 addition facts can be mastered by mid-grade 1. *Arithmetic Teacher 33*(3), 8–10.

Roche, A. et D.-M. Clarke (2006). When successful comparison of decimals doesn't tell the full story. In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, et N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, pp. 425–432. Prague : PME.

Rocher, T. (2008). Lire, écrire, compter : les performances des élèves de cm2 à vingt ans d'intervalle 1987 - 2007. *Note d'information - DEPP 8-38*.

Roditi, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat., Université Paris Diderot.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aideaux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives 12*, 55–81.

Stacey, K. (2005). Travelling the road to expertise : A longitudinal study of learning. In H. L. Chick et J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Volume 1, Melbourne : PME., pp. 19–36.

Steinle, V. (2004). *Changes with age in students' misconceptions of decimal numbers*. Ph. D. thesis, Thèse. Université de Melbourne.

Tazouti, Y., C. Viriot-Goeldel, C. Matter, A. Geiger-Jaillet, R. Carol, et D. Deviterne (2011). French nursery schools and German kindergartens : Effects of individual and contextual variables on early learning. *European Journal of Psychology of Education 26*, 199–213.

Cnesco

Carré Suffren

31-35 rue de la Fédération

75 015 Paris

cnesco.communication@education.gouv.fr

École normale supérieure de Lyon
Institut français de l'Éducation

19 allée de Fontenay
69 007 Lyon

conf.consensus.ife@ens-lyon.fr