cnesco
conseil national d'évaluation du système scolaire

INSTITUT FRANÇAIS DE L'ÉDUCATION

CONFÉRENCE DE CONSENSUS

NOMBRES ET OPÉRATIONS : PREMIERS APPRENTISSAGES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Un bilan scientifique

Michel FAYOL

Novembre 2015

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
ENS DE LYON
BUFFON
école supérieure de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche
CANOPÉ
LE RÉSEAU DE CRÉATION ET D'ACCOMPAGNEMENT PÉDAGOGIQUES
RÉSEAU NATIONAL DES ÉSPÉ
Le café pédagogique

NOMBRES ET OPÉRATIONS : PREMIERS APPRENTISSAGES

Un bilan scientifique

Michel Fayol
Professeur émérite
Université de Clermont Auvergne Blaise Pascal

Novembre 2015

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

cnesco
conseil national d'évaluation du système scolaire

Introduction

Ce bilan retient de la littérature scientifique les publications, récentes pour la plupart, traitant des trois thèmes retenus par la commission restreinte chargée de la préparation de cette Conférence de Consensus (Annie Feyfant ; Sophie Soury-Lavergne ; Jean-François Chesné et Michel Fayol). Il s'appuie de manière dominante sur des textes issus de revues ou d'ouvrages anglo-saxons. Il rapporte toutefois, lorsqu'elles sont disponibles, les synthèses accessibles en français. Certains chapitres doivent beaucoup aux membres de la commission qui les ont relus et qui ont proposé des modifications, toujours pertinentes.

Les trois chapitres sont les suivants :

Section I : de l'intuition des grandeurs et quantités aux nombres naturels ;

Section II : l'apprentissage et l'utilisation de la numération décimale ;

Section III : les opérations.

Aux trois chapitres correspondant chacun à l'un des thèmes, nous avons ajouté trois annexes traitant chacune de thèmes estimés importants pour que le lecteur puisse intégrer certaines informations :

- la mémoire de travail ; - les faits numériques ; - et la ligne numérique.

Nous avons préféré placer ces informations en annexe plutôt que de les intégrer directement dans les chapitres où ils auraient occupé un espace rendant difficile la continuité de la lecture. Le lecteur pourra s'y reporter à volonté et disposer ainsi d'une revue relativement complète et actualisée concernant spécifiquement les mathématiques.

I De l'intuition des grandeurs et quantités aux nombres naturels

1 Introduction et résumé

Les trois dernières décennies ont permis d'accumuler des données qui suggèrent l'existence d'intuitions innées, souvent considérées comme héritées de l'histoire des espèces, qui guideraient l'enfant dans ses acquisitions et apprentissages mathématiques ultérieurs. Il s'agirait d'une capacité présymbolique, portant sur la perception des grandeurs (longueurs, aires, volumes, mais aussi intensité sonore et lumineuse, etc.) et des quantités (collections d'objets ou d'entités individualisées), les deux étant vraisemblablement initialement traitées de manière similaire (en fonction des caractéristiques perceptives) [1] . Cette capacité se manifesterait sous deux aspects. Premièrement, les bébés et les très jeunes enfants sont en mesure de différencier une entité de deux entités quelconques, et deux de trois, mais le caractère numérique de cette discrimination n'est pas attesté ; il se pourrait qu'elle relève de la possibilité de différencier et de maintenir temporairement en mémoire des objets différenciés. Deuxièmement, les bébés seraient en mesure de discriminer de grandes quantités ou grandeurs sous réserve que le rapport des deux quantités ou grandeurs soit de l'ordre de 3 (par exemple 18 et 6), puis 2 (18 et 9), avec un affinement progressif au cours du développement. Au total, cette capacité de traitement des grandeurs et quantités serait limitée en étendue (elle ne pourrait porter que sur des grandeurs et quantités restreintes) et en précision (les évaluations resteraient approximatives,

1. Mais voir Odic, D., Libertus, M.E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Developmental change in the acuity of approximate number and area representations. *Developmental Psychology*, 49 (6), 1103-1112.

sauf pour les petites quantités). Cette capacité de base [2] permettrait une estimation approximative et une comparaison rapide des grandeurs et quantités ainsi que la perception des ajouts ou retraits et de leurs effets. Elle serait automatique, inaccessible à la conscience et non symbolique, indépendante du langage et de l'éducation (au moins initialement). La comparaison de deux grandeurs ou quantités (taille, durée, brillance, angles, etc.) est d'autant plus facile qu'elles sont éloignées (les tailles d'une souris et d'un éléphant) et difficile qu'elles sont proches (les tailles d'une souris et d'un hamster), c'est l'effet de distance. La difficulté augmente aussi avec la taille des grandeurs et quantités : à distance constante, la comparaison de 125 et 126 est plus difficile que celles de 25 et 26 ou encore de 5 et 6 (c'est l'effet dit de taille). Quelles qu'elles soient, plus les grandeurs et quantités sont proches, plus les erreurs sont fréquentes et les durées de réponse longues, ce qui suggère l'existence d'une représentation mentale commune ou de processus de comparaison communs [3] . Des différences interindividuelles seraient très tôt observables.

Cette capacité subsiste chez l'adulte. D'une part, le traitement des petites quantités (de un à trois ou quatre) - le subitizing - s'effectue très précisément et rapidement, même lorsque les configurations spatiales sont irrégulières [4] . D'autre part, l'évaluation approximative des grandeurs et quantités reste disponible. N'importe lequel d'entre nous est en mesure d'estimer (sans dénombrer, et avec plus ou moins d'imprécision) un nombre de tuiles sur un toit, la hauteur d'un arbre, le poids d'un melon, etc. Toutefois, la précision de l'approximation s'améliore, d'une part en fonction de l'âge [5] et d'autre part, en fonction de l'environnement, et notamment du fait que ce dernier utilise des systèmes symboliques (verbaux ou indo-arabes) pour quantifier précisément les quantités. Ainsi, les Munduruku, peuplade d'Amazonie, manifestent une évolution de la précision des estimations qui s'améliore en fonction de leur exposition aux systèmes symboliques (les nombres) et de leur fréquentation de l'école [6].

L'apparition du langage (ou des systèmes symboliques en général) permet, seule, de dépasser ces limitations initiales en permettant d'exprimer toute quantité avec le même degré de précision. L'acquisition du langage commence entre 12 et 18 mois, avec des différences interindividuelles considérables. Une fois amorcé, le développement du lexique, puis celui de la syntaxe, s'effectuent très rapidement. Pourtant, en ce qui concerne l'apprentissage des composantes du dénombrement (les noms de nombres et les conduites de dénombrement), l'évolution est moins simple. Certains enfants apprennent très précocement et très rapidement la suite des noms de nombres : ils sont capables de les réciter sur demande en allant parfois relativement loin dans la suite déjà à 2 ans et demi ou 3 ans. Toutefois, la mise en relation avec la valeur cardinale des nombres est loin d'être établie : les données disponibles suggèrent qu'en troisième année, les

2. Core knowledge : Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions. The Year in Cognitive Neuroscience. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 232-259.

3. Cantlon, J.F., Platt, M.L., Brannon, E. (2009). Beyond the number domain. *Trends in Cognitive Sciences*, 13, 83-91. Walsh, V. (2003). A theory of magnitude : common cortical metrics of time, space, and quantity. *Trends in Cognitive Sciences*, 7, 483-488. Cantlon, J.F., Platt, M.L., Brannon, E. (2009). Beyond the number domain. *Trends in Cognitive Sciences*, 13, 83-91.

4. Fischer, J-P. (1991). Le subitizing et la discontinuité après 3. In J. Bideaud, C. Meljac, et J-P. Fischer (Eds.), *Les chemins du nombre* (pp. 235-258). Lille : Presses Universitaires du Septentrion. Piazza, M., Fumarola, A., Chinello, A., & Melcher, D. (2011). Subitizing reflects visuo-spatial object individuation capacity. *Cognition*, 121(1), 147-153.

5. Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116, 33-41. Nys, J., Ventura, P., Fernandes, T., Querido, L., & Leybaert, J. (2013). Does math education modify the approximate number system ? A comparison of schooled and unschooled adults. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 13-22.

6. Piazza, M., Pica, P., Izard, V., Spelke, E., & Dehaene, S. (2013). Education enhances the acuity of the non-verbal approximate number system. *Psychological Science*, 24 (6), 1037-1043.

enfants savent donner une et deux entités, savent aussi dénombrer un et deux, mais se trompent souvent avec trois et au-delà. Ils semblent ne pas comprendre la relation entre le comptage et le cardinal [7]. Comme nous le verrons, l'apprentissage de la numération verbale et du nombre s'étale sur une longue période et soulève de nombreux problèmes, souvent sous-estimés.

2 La quantification des collections

Les enfants de 6 mois sont en mesure de discriminer des quantités non symboliques dans un rapport de 1 à 2, par exemple ils différencient 8 de 16, mais non 8 de 12 ; ceux de 9 mois dans un rapport de 2 à 3 par exemple 8 de 12 mais non 8 de 10. Ces limites de discrimination valent pour les modalités visuelle et auditive. Elles s'améliorent entre 3 et 6 ans, passant d'un rapport de 3/ 4 à 4/ 5, sans que la valeur du rapport adulte soit atteinte (10/11). Certains chercheurs ont essayé de déterminer si les capacités de discrimination évoluent différemment entre 3 et 6 ans pour les grandeurs et pour les quantités [8]. Les deux évolutions sont parallèles mais la discrimination des grandeurs (ici les aires) serait plus précoce que celle des quantités (collections de points). L'intuition des grandeurs et des quantités numériques se développe donc très tôt, s'améliore au cours de la période préscolaire et continue à évoluer après les débuts de l'enseignement scolaire. D'emblée existent d'importantes différences interindividuelles. Cette intuition apparaît négativement affectée chez certains enfants dits dyscalculiques [9]. Ces données laissent ouvertes deux questions : l'éventuelle existence d'un mécanisme initialement commun intervenant pour le traitement des grandeurs comme pour celui des quantités ; la possibilité que l'acuité de la discrimination des grandeurs et des quantités soit reliée aux habiletés de manipulation des symboles mathématiques [10].

Une synthèse récente apporte un éclairage sur les relations entre capacités de discrimination portant sur des entités non-symboliques (des collections de jetons par exemple) et les performances ultérieures à des épreuves faisant appel à des traitements symboliques (par exemple des comparaisons de chiffres arabes) voire à des problèmes mathématiques (résolution d'opérations simples ou résolution de problèmes arithmétiques) [11]. La méta-analyse conduite par Chen et Li (2014) porte sur les études transversales (36 études, 4700 participants) et longitudinales (6 études, 714 participants). Les performances aux comparaisons non-symboliques comme aux comparaisons symboliques sont significativement corrélées aux performances ultérieures en mathématiques (les corrélations sont de l'ordre de $r = 0{,}20$) une à deux années plus tard.

7. Mix, K.S., Sandhofer, C.M., Moore, J.A., & Russell, C. (2012). Acquisition of the cardinal word principle : The role of input. *Early Childhood Research Quarterly*, 27, 274-283. Mix, K.S. (2009). How Spencer made number : First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 427-444. Palmer, A. & Baroody, A.J. (2011). Blake's developement of the number words "One", "Two", and "Three". *Cognition and Instruction*, 29 (3), 265-296.

8. Odic, D., Libertus, M.E., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Developmental change in the acuity of approximate number and area representations. *Developmental Psychology*, 49 (6), 1103-1112.

9. Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., Dehaene, S., & Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116, 33-41

10. De Smedt, B., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2009). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 469-479. De Smedt, B., & Gilmore, C.K. (2011). Defective number module or impaired access ? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108, 278-292. Gilmore, C.K., McCarthy, S.E., & Spelke, E.S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition*, 115, 394-406. Holloway, I.D. & Ansari, D. (2008). Domain-specific and domain-general changes in children's development of number comparison. *Developmental Science*, 11, 644-649. Mundy, E., & Gilmore, C.K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 490-502.

11. Chen, Q., & Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance : A meta-analysis. *Acta Psychologica*, 148, 163-172.

L'amélioration des performances en mathématiques consécutive aux deux entraînements n'explique au total que 4 % de la variance. Ce résultat soulève deux questions : d'une part, la faiblesse de la part de variance expliquée implique que de nombreuses autres variables influent sur les performances, et que seules des recherches portant sur l'apprentissage sont en mesure d'évaluer leurs poids respectifs ; d'autre part, l'impact de la composante non-symbolique pourrait n'avoir d'effet qu'en transitant par l'acquisition des formes symboliques, verbales, arabes ou signées.

Les travaux portant sur les entraînements, qui visent à tester l'éventualité de relations causales, sont peu nombreux. Deux recherches ont été conduites chez des adultes [12]. Toutes deux montrent qu'entraîner des adultes à affiner l'acuité des discriminations de quantités non symboliques (des collections de jetons) améliore les performances en discrimination de ces quantités (mais pas des grandeurs : longueurs par exemple) mais aussi en discrimination de nombres exprimés en chiffres arabes. Les progrès se traduisent par une diminution d'influence de la dimension spatiale : l'évaluation des quantités dépend de moins en moins de la surface occupée ou de la densité des ensembles présentés. Ce résultat a une certaine importance relativement à l'évolution des performances chez les enfants. Toutefois, la prise en compte des effets des entraînements sur les performances des enfants exige que soit abordée préalablement l'acquisition des systèmes de représentation symbolique.

3 L'acquisition de la suite verbale de noms de nombres

Dans nos sociétés, les activités ayant trait à la numération orale mobilisent un système verbal permettant de dénommer avec précision toute quantité, quelle qu'elle soit, de la plus petite (un) à la plus grande. Cette capacité semble inhérente au fonctionnement humain. Pourtant, les performances de tribus d'Amazonie montrent qu'il n'en va pas ainsi [14]. Parmi ces tribus, les Piraha ne disposent que de quelques noms de nombres (un, deux, trois) et les utilisent de manière peu précise et stable : le terme "trois" peut ainsi se voir associé à deux, trois ou quatre (voire plus) entités. En somme, l'existence, la forme et le fonctionnement des systèmes verbaux de dénomination des quantités numériques dépendent des cultures et présentent d'importantes différences. Ces différences influent d'une part, sur la facilité relative de leur acquisition et, d'autre part, sur la mise en relation avec les quantités correspondantes.

Tous les systèmes comportent un lexique plus ou moins étendu associant à une valeur cardinale une dénomination et une seule (sept ; quinze). Selon les langues, cette lexicalisation porte sur des cardinalités plus ou moins importantes : de un à seize en Français, mais de un à dix en Chinois, de un à douze en Anglais. Elle trouve rapidement ses limites dès qu'il s'agit d'exprimer des quantités importantes et rarement évoquées. Pour y parvenir, les systèmes verbaux utilisent une combinatoire (on parle parfois de syntaxe) permettant de produire une infinité de formulations plus ou moins complexes correspondant à n'importe quel cardinal (par exemple, neuf cent quatre-vingt quinze millions six cent vingt mille quatre). Les règles syntaxiques dépendent des cultures : on dit vingt-cinq en Français mais fünfundzwanzig (littéralement cinq

12. DeWind, N.K., & Brannon, E.M. (2012). Malleability of the approximate number system : Effects of feedback and training. [13], 6, article 68. Park, J., & Brannon, E.M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency, *Psychological Science*, 24 (10), 2013-2019.

14. Pica, P., Lemer, C., Izard, V. et Dehaene, S. (2004). Exact and approximate arithmetic in an amazonian indigene groupe. *Science*, 306, 499-503. Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words : Evidence from Amazonia. *Science*, 306 (5695), 496-499. Frank, M.C., Everett, D.L., Fedorenko, E., & Gibson, E. (2008). Number as a cognitive technology : Evidence from Pirahä language and cognition. *Cognition*, 108, 819-824

et vingt) en Allemand. Ces règles opposent des combinaisons de types additif (cent huit) et multiplicatif (huit cents).

La chaîne verbale orale s'acquiert entre deux et six ou sept ans. Les suites produites par les enfants en cours d'apprentissage s'organisent à partir d'une partie stable et conventionnelle (un, deux, trois) qui s'accroît avec l'âge et la pratique, surtout à partir de 4 ans et demi [15]. La progression du début de la suite numérique est lente et difficile et les différences interindividuelles sont faibles. À partir de 4 ans et demi, le nombre de formes verbales augmente rapidement et certains enfants commencent à utiliser la combinatoire. Les différences de rythme d'acquisition entre systèmes verbaux sont particulièrement marquées entre les performances des enfants occidentaux confrontés à des systèmes irréguliers et les enfants du sud-est de l'Asie qui acquièrent très vite des systèmes dont la base dix est saillante et permet d'étendre facilement la production des combinaisons [16]. Les enfants occidentaux progressent en commettant des erreurs temporaires (vingt-huit, vingt-neuf, vingt-dix) qui disparaissent rapidement. Les difficultés sont plus importantes en français et en France en raison des irrégularités du système verbal à partir de soixante (soixante-dix ; quatre-vingts ; quatre-vingt-dix). Les différences interindividuelles augmentent alors entre les enfants utilisant déjà la combinatoire et ceux qui en sont encore à l'apprentissage par cœur du début de la liste. Ces différences semblent tenir à la fois à l'impact de la maturation et à celui de l'environnement [17]. De fait, une partie d'entre elles se réduit assez facilement chez les enfants tout-venant qui se trouvent dans un environnement (le milieu familial ou le milieu scolaire) qui les sollicite et les incite à utiliser des expressions numériques [18]. Les enfants présentant des troubles spécifiques du langage sont évidemment handicapés pour effectuer cette acquisition ; ils manifestent des retards parfois très importants.

L'organisation progressive de la suite verbale se manifeste par l'indépendance croissante des noms de nombres les uns par rapport aux autres et par leur mise en relation. Dans un premier temps, ces mots constituent une chaîne non-analysable (un deux trois quatre), dite insécable, énoncée d'un seul bloc et ne permettant aucune opération ni dénombrement. Ensuite, les items s'individualisent, la suite se décompose en noms de nombres (undeuxtrois..), permettant le parcours de la suite dans le sens avant et la réalisation d'opérations par comptage à partir du début (un, deux, trois, etc..). Ultérieurement, la suite sécable autorise le comptage en avant (trois, quatre, etc.) comme en arrière (cinq, quatre, etc.), et le traitement d'additions et de soustractions simples par simulation des situations (avancer pour un ajout ; reculer pour un retrait). L'étape suivante permet non seulement le dénombrement des entités, mais aussi celui des chiffres utilisés pour aller d'un nombre (x) à un autre (y). Les opérations deviennent possibles dans les deux sens. L'organisation progressive entre trois et huit ans de la suite des noms de nombres conditionne à la fois

15. Fuson, K. C., Richards, J., & Briars, D. (1982). The acquisition and elaboration of the number word sequence. In C. J. Brainerd (Ed.). *Children's logical and mathematical cognition : Progress in cognitive development research* (pp. 33-92). New York : Springer

Verlag. Fuson, K. C. (1988). Children's counting and concept of number. New York : Springer-Verlag. Siegler, R., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understanding. In H.W. Reese, 1 L.P. Lipsitt (Eds.) *Advances in Child Development and Behavior*, 16. New York : Academic Press

16. Fayol, M. (2002). Langage et développement apprentissage de l'arithmétique cognitive. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques* (pp. 151-173). Paris : Hermès. Miller, K.F., Smith, C.M., Zhu, J. et Zhang, H. (1995). Preschool origins of cross-national differences in mathematical competence : the role of number-naming systems. *Psychological Science*, 6, 56-60.

17. Ramani, G.B., Rowe, M.L., Eason, S.H., & Leech, K.A. (2015). Math talk during informal learning activities in Head Start families. *Cognitive Development*, 35, 15-33.

18. Ginsburg, H., & Russel, R.L. (1981). Social class and racial influences on early mathematical thinking. *Monographs of the Society for Research in Child Developement*, 46, serial number 193.

la réalisation des activités de dénombrement et celle des opérations arithmétiques simples : addition et soustraction. Toutefois, cette acquisition ne garantit pas que les enfants comprennent d'emblée la relation avec la cardinalité des ensembles.

A Des noms de nombres à la désignation des quantités

Certaines sociétés ne disposent pas de système verbal développé allant au-delà de 3 ou 4. De plus, les associations entre noms de nombres et quantités sont floues (sauf pour un et deux), suggérant que la mise en correspondance entre des formes verbales distinctes les unes des autres (un, deux, n) et des quantités successives (discriminables obtenues en ajoutant un à la précédente) est un apprentissage culturellement déterminé. Le problème soulevé par cet apprentissage doit être décomposé en trois dimensions : la perception et la discrimination des grandeurs et quantités (voir ci-dessus), l'acquisition de la suite des noms de nombres ou des symboles ayant la même fonction (voir ci-dessus), la mise en relation entre les deux, qui constitue sans doute la question cruciale [19].

Des résultats anciens ont montré que le dénombrement des quantités et l'acquisition de la valeur cardinale (déterminer qu'une collection a 5 éléments ; ou élaborer un ensemble de 4 objets) demandent beaucoup de temps et donnent lieu à des erreurs nombreuses et durables. En 1921, Descœudres avait rapporté que les enfants entre 2 ans et demi et 6 ans ne parvenaient à utiliser correctement un nombre donné (par exemple 3) que dans des situations limitées alors même qu'ils échouaient avec ce même nombre dans des conditions pourtant peu différentes, comme l'illustre le tableau ci-dessous [20]. Ces résultats, alors difficiles à interpréter ont été confirmés : ils font apparaître qu'à la période considérée (entre 2 et 5 ans), alors que les enfants acquièrent un énorme quantité de mots nouveaux, certains très sophistiqués, les dénominations des quantités évoluent très lentement. Les enfants de 3 ans, qui connaissent les noms de nombres souvent jusqu'à dix (voire plus), qui sont capables de dénombrer de petites collections, mais qui ne peuvent donner sur demande que deux, trois ou quatre éléments (two- three-, four-knowers) ne sont en mesure de comprendre les effets des ajouts ou des retraits que sur des ensembles correspondant à ces cardinalités [22]. Ils ne généralisent pas ces connaissances à des collections de tailles plus importantes, telles celles de 6 ou de 8 bien qu'ils sachent les noms de nombres et qu'ils les énoncent dans l'ordre conventionnel (5-6 -7-8).

Le développement suit un ordre précis : en premier vient le nombre "un" (vers 2 ans et demi : les one-knowers ne peuvent que donner ou dénombrer un objet), puis "deux" (vers 3 ans ou 3 ans et demi : two-knowers), puis "trois" (vers 3 ans et demi ou 4 ans : three-knowers). Peu après être devenus "three-knowers", les enfants découvriraient le principe cardinal et la fonction de successeur : chaque nom de nombre a un successeur, lequel correspond à la quantité du précédent augmentée de un. C'est alors qu'ils pourraient élaborer une signification adulte des noms de nombres, tels "cinq ou six".

Ces premières acquisitions numériques dépendraient de la disponibilité dans les langues de marques du singulier et du pluriel. L'anglais, mais non le japonais, utilise une opposition de marques singulier/pluriel. Or,

19. En s'inspirant par exemple du modèle dit du triple code : Dehaene, S. (1997). *La bosse des maths*. Paris : Odile Jacob.
20. Descoeudres, A. (1921). [21]. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.
22. Condry, K.F., & Spelke, E.S. (2008). The development of language and abstract concepts : The case of natural number. *Journal of Experimental Psychology : General*, 137, 22-38.

Figure 1 – Performances relevées par Descœudres à des épreuves numériques simples en fonction des âges (2 ans et demi, 3 ans, etc.). Voir note en fin de chapitre.

TYPES DE TACHES	2 1/2	3	3 1/2	4	4 1/2	5	5 1/2	6
-Reproduire un nombre donné d'objets	1	–	3	–	–	4	–	–
-Montrer autant de doigts que d'objets	–	1-2	–	3	–	4	–	–
-Montrer autant d'objets que de doigts	–	1-2	–	–	3	4	–	–
-Imiter un nombre de coups frappés	–	–	1	–	2	–	3	–
-Dire combien on a entendu de coups	–	–	–	–	1-2	3	–	4
-Dire combien d'objets sans compter	1	2	–	–	3	–	–	4
-Donner un certain nombre d'objets à 1, 2,3 personnes	1	2	–	–	3	–	–	4 à 10
-Répéter la suite des nombres	1 à 4	1 à 5	1 à 6	–	1à 7-8	1 à 10	–	–
-Dénombrement avec les doigts	–	–	–	–	2 à 6	7 à 10	–	–

les performances des enfants anglais aux épreuves précédemment décrites sont plus précoces et meilleures que celles des enfants japonais [23]. Ces résultats sont à rapprocher de ceux issus des recherches sur les peuplades d'Amazonie, qui montrent la conjonction de l'absence de noms de nombres (au-delà de trois) et de marques de singulier/pluriel.

Deux raisons sont classiquement évoquées pour expliquer la lenteur avec laquelle les enfants apprennent les premiers noms de nombres et leur signification : 1) la catégorisation qu'implique la cardinalité ; une spécificité du code verbal : 2) le codage de l'accroissement de la quantité par l'ordre. La capacité de reconnaître l'équivalence de deux quantités quels que soient les éléments et leurs dispositions est une compétence centrale et suppose la capacité de catégoriser comme équivalents des ensembles qui diffèrent

23. Sarnecka, B.W., Kamenskaya, V.G., Yamana, Y., Ogura, T., & Yudovina, Y.B. (2007). From grammatical number to exact numbers : Early meanings of "one", "two", and "three" in English, Russian, and Japanese. *Cognitive Psychology*, 55, 136-168. Sarnecka, B.W. (2014). On the relation between grammatical number and cardinal numbers in development. [24], 5, 1132

sur de nombreuses dimensions sauf une : la cardinalité. On a demandé à des enfants de 2 ans et demi à 4 ans et demi dont la capacité à donner une quantité avait été préalablement évaluée de choisir de deux cartes celle qui correspondait au nombre d'objets qui se trouvaient sur une première carte [25]. Les enfants voyaient d'abord une carte comportant un certain nombre (2, 3 ou 4) d'objets : des jetons noirs de 2 cm de diamètre ou des coquillages rouges de 2,5 cm ou des objets hétérogènes choisis parmi un ensemble de 36 objets. Cette carte était ensuite retournée. Les enfants voyaient alors deux cartes comportant des entités et des configurations variées (coquillages, animaux de tailles variables, etc.) dont le cardinal était pour l'une mais non pour l'autre égal à celui de la carte initiale. Les enfants progressent entre 3 ans et 4 ans et demi : la reconnaissance de l'équivalence est d'abord possible pour les mêmes objets, puis pour des collections relativement homogènes et, enfin, pour des collections hétérogènes. La connaissance des noms de nombres influe également. Les enfants qui comptent le plus loin sont ceux qui reconnaissent le mieux l'équivalence des ensembles hétérogènes. La connaissance de la chaîne verbale contribue ainsi à la reconnaissance de l'équivalence des ensembles.

L'utilisation de la numération verbale pour déterminer le cardinal d'une collection nécessite également la compréhension du principe selon lequel le langage encode la quantité. Dans la vie quotidienne, ou lorsqu'on fait appel à une représentation mentale analogique, l'accroissement de quantité se traduit par une augmentation de longueur, de densité ou de volume : plus le nombre d'éléments s'élève, plus la taille, la longueur, le volume des ensembles considérés s'accroissent [26]. Le langage, lui, code la quantité d'une manière conventionnelle, par l'ordre des signes, c'est-à-dire le rang qu'ils occupent dans la chaîne. "Six" renvoie à une quantité plus importante que "cinq" puisque "six" suit "cinq", mais "six" ne comporte en lui-même aucun indice de ce qu'il évoque un cardinal supérieur à "cinq". L'utilisation du langage pour la dénomination des quantités ne conserve aucune trace de l'accroissement. Elle nécessite donc que les noms de nombres évoquent les valeurs cardinales dans la mémoire, et qu'ils le fassent de manière précise et automatique, sauf à énoncer systématiquement la suite des noms de nombres. Or, cette évocation constitue sans doute le problème majeur auquel se trouvent confrontés les enfants de deux à quatre ou cinq ans.

En résumé, l'acquisition du code verbal précis constitue une étape longue et difficile au cours de laquelle les enfants doivent acquérir, d'une part, la capacité d'évoquer mentalement les quantités à partir des dénominations indépendamment des caractéristiques concrètes des entités qui sont concernées et, d'autre part, la compréhension de ce que l'ordre des noms de nombres code de manière conventionnelle l'accroissement des quantités. Chacune de ces dimensions soulève des problèmes spécifiques, tous n'étant pas encore identifiés et étudiés, qui existent dans toutes les langues, comme l'atteste la lenteur de l'acquisition des premiers nombres (de un à dix) dans les cultures orientales et occidentale [27]. De plus, la mise en place des associations entre le cardinal des collections et les dénominations semble relever de mécanismes qui interviennent dans la catégorisation. Le langage pourrait intervenir comme un outil cognitif facilitant la constitution de la cardinalité, la disponibilité d'un lexique permettant de considérer comme équivalentes du

25. Mix, K.S. (1999). Similarity ad numerical equivalence : Appearances count. *Cognitive Development*, 14, 269-297. Mix, K .S. (2008). Children's equivalence judgments : Crossmapping effects. *Cognitive Development*, 23, 191-203. Mix, K.S. (2008). Surface similarity and label knowledge impact early numerical comparisons. *British Journal of Developmental Psychology*, 26, 13-32.

26. English, L.D. & Halford, G.S. (1995). *Mathematics education*. Mahwah, NJ : L.E.A.

27. Miller, K.F., Kelly, M., & Zhou, X. (2005). Learning mathematics in China and the united States. In J.I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 163-178). New York : Psychology Press.

point de vue de leur cardinal des collections que leur apparence conduirait plutôt à traiter comme ayant des valeurs cardinales différentes.

B Le dénombrement : la quantification par comptage

La quantification précise des grandes quantités nécessite le recours au dénombrement, qui associe l'énonciation de la suite verbale des noms de nombres et le pointage un à un des entités à dénombrer. Cette pratique trouve son intérêt lorsque les enfants ont acquis les bases des associations entre la suite des noms de nombres et le cardinal des collections, notamment la capacité de déterminer le cardinal d'une collection en ajoutant un au cardinal de celle qui précède (par itération de l'unité). La mise en œuvre du dénombrement nécessite la coordination de deux activités : d'une part, généralement, une activité verbale de remémoration et d'énonciation des noms de nombres (la comptine ou chaîne verbale) ; d'autre part, une activité motrice de pointage digital ou visuel qui assure que tous les éléments de l'ensemble à dénombrer ont été traités, chacun une fois et une seule. Ces deux activités doivent être synchronisées pour établir une stricte correspondance terme à terme entre le traitement des éléments et l'énonciation des noms de nombres[28].

Dans une tâche de dénombrement de la même collection, un enfant peut fournir deux réponses différentes lors de deux dénombrements successifs. Cette instabilité pose un double problème : 1) théorique, comment rendre compte de cette instabilité ? 2) pédagogique, comment estimer les compétences disponibles à partir des performances observées ? Soit on considère que les enfants ne disposent pas de la compétence indispensable à la compréhension du nombre, soit on postule qu'ils commettent des erreurs de performance du fait de difficultés de mise en œuvre des procédures de comptage consécutives à des problèmes d'attention, de mémoire, ou autres. Cette seconde thèse renouvelé dans les années 70-80 l'étude du comptage et de l'acquisition du nombre . Selon cette thèse, le comptage reposerait sur cinq principes déjà disponibles chez des enfants très jeunes (Figure 1).

Figure 2 – Les principes fondamentaux du comptage (Gelman & Gallistel, 1978)

1- Principe d'ordre stable : Les mots-nombres doivent être engendrés dans le même ordre
à chaque comptage

2- Principe de stricte correspondance terme à terme : Chaque élément d'une collection doit être désigné
par un mot-nombre et un seul

3- Principe cardinal : Le mot-nombre qui désigne le dernier élément d'une collection
représente le nombre total d'éléments

4- Principe d'abstraction : Seules sont abstraites, des éléments comptés,
leurs caractéristiques d'entités distinctes

5- Principe de non pertinence de l'ordre : L'ordre dans lequel les éléments d'une collection sont énumérés
n'affecte pas le résultat du comptage à condition que le principe de correspondance terme à terme soit respecté.

28. Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press. Gelman, R. & Meck, E. (1983). Preschoolers'counting : Principles before skills. *Cognition*, 13, 343-359. Camos, V., Fayol, M. & Barrouillet, P. (1999) L'activité de dénombrement chez l'enfant : double tâche ou procédure ? *L'Année Psychologique*, 99, 623-645. Camos, V., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2001). Does the coordination of verbal and motor information explain the development of counting in children ? *Journal of Experimental Child Psychology*, 78, 240-262.

Pour étayer cette thèse, les auteurs ont utilisé des épreuves de jugement : les enfants doivent évaluer si la procédure utilisée par une poupée est conforme à l'objectif de dénombrement d'une collection. Or, cette poupée, tantôt recourt à des manières conventionnelles (par exemple utiliser la suite conventionnelle des noms de nombres ; ou traiter les objets adjacents) tantôt procède de manière erronée (omettre un nom de nombre : un, deux, trois, cinq ; ou oublier de considérer un objet) ou non conventionnelle (par exemple en commençant par la droite plutôt que par la gauche). Ces épreuves focalisent l'attention des enfants (de 3 à 5 ou 6 ans) sur tel ou tel aspect du dénombrement tout en diminuant la complexité de cette activité puisque les participants n'ont pas à effectuer eux-mêmes la tâche mais simplement à évaluer sa justesse par rapport à l'objectif poursuivi (dire combien il y a d'entités dans une collection) et corriger les erreurs. Les premiers résultats ont montré que, dès 3 ans, les performances des enfants sont très bonnes aux épreuves testant spécifiquement les principes. Les reprises ont toutefois suggéré que les performances des enfants avaient été surestimées, mais elles ne remettaient pas en cause l'hypothèse des principes. Simplement, elles ont abouti à considérer que la mise en œuvre varie en fonction des principes : certains sont précocement acquis (le respect de l'ordre des noms de nombres) alors que d'autres (la cardinalité) le sont plus tardivement, par exemple en fonction de la maîtrise de la chaîne verbale et de la difficulté du contrôle du pointage des éléments à dénombrer.

Le principe de cardinalité pose particulièrement problème. Tout se passe comme si les enfants n'établissaient que tardivement la relation entre comptage (une procédure) et quantification (déterminer le cardinal d'une collection). Ils semblent se référer à une sorte de règle du type "le dernier mot prononcé est le bon" (par exemple cinq) sans que celui-ci renvoie nécessairement à la cardinalité. Ce constat en recoupe d'autres, notamment que les enfants jeunes ne recourent ni spontanément ni systématiquement au comptage pour déterminer le cardinal d'une collection pour effectuer des comparaisons ou juger que la quantité reste la même [29]. La difficulté à associer le cardinal à la procédure de comptage pourrait aussi tenir à la nature même des épreuves : les enfants sont incités à pointer un objet tout en énonçant un nom de nombre. Or, cette manière de procéder ne se focalise pas sur l'essentiel : que le nom de nombre (trois par exemple) renvoie non pas à l'objet en cours de traitement (le troisième traité) mais à l'ensemble des objets traités jusqu'alors [30]. Une modification de la procédure, par exemple en déplaçant les objets plutôt que de simplement les pointer, pourrait entraîner une amélioration des performances et favoriser l'accès au cardinal des collections.

Les reprises ultérieures des épreuves élaborées par Gelman ont conduit à moduler les données initiales et ont mis en évidence que les enfants semblent suivre de pseudo-principes. Ainsi, les enfants de 3 ans jugent corrects à 95 % les dénombrements exacts suivant un déroulement conventionnel, à 75 % ceux qui sont exacts mais effectués de manière peu ou pas conventionnelle (par exemple en commençant par un jeton de la fin d'une collection). Ils rejettent à 57 % ceux qui sont erronés [31]. Les réponses aux dénombrements exacts et non conventionnels suivent une évolution particulière : acceptés par les plus jeunes, ils sont refusés

29. Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C., & Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171. Michie, S. (1984). Why preschoolers are reluctant to count spontaneously ¿ *British Journal of Developmental Psychology*, 2, 347-358. Miller, K. F. (1996). Origins of quantitative competence. In T. Kit-Fong & R. Gelman (Eds.), *Perceptual and cognitive development* (pp. 213-241). San Diego : Academic Press.

30. Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris : Retz

31. Briars, D., & Siegler, R. S. (1984). A feature analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20, 607-618.

à la période suivante avant d'être à nouveau acceptés vers 5-6 ans. De plus, les enfants qui échouent le plus souvent (à plus de 25 %) à rejeter les dénombrements erronés de la poupée sont aussi ceux qui commettent le plus d'erreurs dans leurs propres comptages. L'étude sur de larges populations (comme aux Pays Bas sur plus de 400 enfants) a conduit à mettre en évidence que les différents principes ne s'acquièrent pas en même temps. Seulement environ 50 % des élèves les maîtriseraient tous en fin de grande section maternelle [32] . Le suivi longitudinal de ces mêmes élèves révèle que les enfants ayant les meilleures performances de comptage sont ceux qui ont les meilleurs résultats en arithmétique en CP. Les réussites aux épreuves associées aux principes en GSM contribuent donc à expliquer les performances mathématiques ultérieures, mais cette contribution reste modeste (seulement 14 % de la variance des scores arithmétiques en CP).

Figure 3 – Pourcentages de maîtrise des différents principes par environ 420 élèves en fin de Grande Section Maternelle (âgés de 70 mois en moyenne) aux Pays-Bas.

	Non mastery	Inconsistent	Mastery
Stable-order principle (SOP)	37.6%	/	62.4%
One–one-correspondence principle (OOP)	4.7%	/	95.3%
Cardinality principle (CP)	34.3%	/	65.7%
SOP + OOP	4.2%	36.7%	59.1%
SOP + CP	16.5%	40.2%	43.3%
OOP + CP	4%	30.3%	65.7%
All 3 principles	55.8%	/	44.2%

Au total, c'est le niveau de l'enfant dans sa propre activité de dénombrement qui paraît conditionner les performances en jugement, et non l'inverse, contrairement à ce que prédisait la thèse de Gelman. Le débat oppose ainsi ceux qui postulent que les "principes" génétiquement déterminés guident l'acquisition du comptage et ceux qui considèrent que c'est la maîtrise progressive de la procédure de dénombrement qui conditionne les performances de jugement. L'observation d'autrui en train de dénombrer amènerait certains enfants voire tous à une certaine période à considérer que le dénombrement doit s'effectuer en traitant les éléments adjacents et non en commençant par exemple au milieu de la collection puis en allant à l'une des extrémités pour revenir vers le milieu, et ainsi de suite. Cette distinction entre deux approches théoriques n'est pas sans incidence sur l'exploitation pédagogique que l'on peut faire des principes de Gelman. La thèse selon laquelle l'observation d'autrui en train de dénombrer contribue à l'apprentissage de la mise en œuvre des principes ouvre la voie aux interventions et à l'évaluation de leurs effets. Elle permet aussi la prise en compte des différences interindividuelles.

Pourtant, la thèse de Gelman et son paradigme continuent à présenter un intérêt. Celui-ci réside dans le fait de rendre compte de l'instabilité des performances et de distinguer les erreurs de performance des difficultés de compréhension conceptuelle. Il suffit en effet de rendre plus faciles (ou difficiles) la récupération de la chaîne verbale ou le repérage des items à dénombrer pour que la performance varie, alors que la compétence reste intacte. Il devient possible de faire la part de ce qui revient d'une part, aux

32. Stock, P., Desoete, A., & Roeyers, H. (2009). Mastery of the counting principles in toddlers : A crucial step in the development of budding arithmetic abilities ? *Learning and Individual Differences*, 19, 419-422.

méconnaissances ou d'autre part, aux difficultés de mise en œuvre. Cette approche est particulièrement pertinente pour diagnostiquer la nature des troubles et pour déterminer la nature des interventions. Deux exemples permettent d'illustrer en quoi. Les jugements des enfants relativement aux principes régissant le dénombrement constituent un des critères de diagnostic précoce des troubles du calcul. Les enfants de première et deuxième années d'école primaire ayant des difficultés en arithmétique et/ou en lecture identifient correctement le respect et les violations des principaux principes mais achoppent sur le traitement de la non pertinence de l'ordre. S'ils acceptent que le dénombrement puisse commencer par la gauche ou par la droite, ils semblent admettre une sorte de pseudo-principe selon lequel il faudrait dénombrer les collections en traitant les éléments placés côte à côte[33].

Pour évaluer les contributions respectives des composantes verbale (la remémoration et de l'énonciation des noms de nombres) et motrice (le pointage) du dénombrement, des chercheurs ont soumis des enfants dysphasiques et dyspraxiques (de 7 à 10 ans) appariés à des enfants contrôles quant au sexe et à l'âge à deux catégories d'épreuves[34]. Premièrement, les enfants devaient réaliser des tâches de jugement en indiquant à quels moments des poupées qui parfois se trompaient commettaient des erreurs de dénombrement. Leurs connaissances conceptuelles relatives au dénombrement étaient ainsi évaluées. Deuxièmement, ces enfants produisaient oralement la suite verbale la plus longue qu'ils étaient en mesure d'énoncer ; ils devaient aussi pointer un à un de manière exhaustive tous les éléments de collections de jetons de tailles et compositions diverses. Ils devaient enfin dénombrer des collections de tailles et compositions équivalentes à celles sur lesquelles ils avaient effectué les pointages. Les performances dans chacune des composantes et dans le dénombrement lui-même étaient ainsi évaluées et pouvaient être comparées. Les résultats ont montré que les troubles affectaient peu les compétences de dénombrement estimées par les réussites aux principes, alors que les performances étaient en moyenne inférieures à celles du groupe contrôle. Ces données confirment celles obtenues en Angleterre auprès d'enfants d'environ 5 ans présentant des troubles du langage (enfants avec Troubles Spécifiques du Langage ou TSL)[35]. Les TSL comptaient aussi bien que les enfants contrôle appariés sur le niveau de production verbale mais (évidemment) moins bien que les enfants appariés sur l'âge (qui comptaient jusqu'à 20). Malgré les fréquentes erreurs d'énonciation de la suite des noms de nombres, la compréhension conceptuelle des TSL était proche de celle des enfants de même âge. Ainsi, les enfants TSL présentaient des difficultés langagières apparemment sans incidence sur la qualité des représentations conceptuelles associées au dénombrement.

En résumé, une fois dépassée la période du début de l'acquisition des relations entre noms de nombres et quantités, l'utilisation de la chaîne verbale dans des tâches de dénombrement progresse assez rapidement et facilement lorsque les conditions de l'activité sont simples. La majorité des enfants parvient précocement à coordonner les deux dimensions verbale et motrice. Les erreurs relèvent plutôt de difficultés d'attention et de mémoire que de lacunes conceptuelles, même chez les enfants présentant des difficultés. Toutefois, certains principes, notamment celui permettant d'établir le cardinal des collections et celui qui concerne l'ordre

33. Geary, D.C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, 37, 4-15.

34. Camos, V., Fayol, M., Lacert, P., Bardi, A. & Laquière, C. (1998). Le dénombrement chez cinq enfants dysphasiques et cinq enfants dyspraxiques. *ANAE*, 48, 86-91.

35. Fazio, B. B. (1994). The counting abilities of children with specific language impairment : a comparison of oral and gestural tasks. *Journal of Speech and Hearing Research*, 37, 358-368. Donlan, C., Cowan, R., Newton, E. J., & Lloyd, D. (2007). The role of language in mathematical development : Evidence from children with specific language impairment. *Cognition*, 103, 23-33.

du dénombrement (commencer par un jeton quelconque plutôt que systématiquement à gauche), posent problème, de manière relativement prolongée chez certains enfants, sans que les raisons en soient clairement identifiées. Comme souvent, les données manquent quant aux effets possibles des interventions des parents ou des enseignants, soit en ce qui concerne l'acquisition de la chaîne verbale, soit relativement à l'instruction explicite des principes, sur les performances et la compréhension par les enfants du fonctionnement du dénombrement. Par exemple, une modification simple conduisant à dissocier spatialement (en les écartant de l'ensemble à dénombrer) les éléments déjà traités pourrait améliorer les performances de détermination du cardinal. De fait, l'ambiguïté inhérente au pointage (dire trois en pointant un seul jeton ; puis quatre en pointant le suivant) entretient la confusion et risque d'empêcher les enfants de comprendre la relation entre comptage et détermination du cardinal des ensembles. Ces questions – essentielles du point de vue pédagogique – devraient faire l'objet d'explorations systématiques [36].

36. Voir, entre autres, les propositions de Brissiaud, R. (2007. *Premiers pas vers les maths*. Paris : Retz.

Note

Plusieurs auteurs ont développé des tâches spécifiques pour évaluer le niveau de compréhension de la valeur cardinale par les enfants. Les épreuves retenues consistent à demander aux enfants soit de donner x objets à extraire d'un ensemble plus large, soit d'indiquer combien d'objets sont dessinés sur une carte [a]. Ces épreuves ont montré que les performances varient selon que l'une ou l'autre est utilisée. Plus récemment, pour étudier le comportement d'enfants de 2 à 3 ans, plusieurs chercheurs ont utilisé une tâche d'imitation de ce que faisait l'expérimentateur : nourrir différentes poupées (oiseaux, requins, etc.) en leur faisant ingurgiter des entités (vers, etc.) dont le nombre variait de 1 à 6. Il s'agissait donc d'une procédure séquentielle qui mobilisait le comptage bien que le mot nombre ne soit jamais mentionné et qu'aucune consigne ne demande à l'enfant de respecter la quantité fournie comme modèle. Les auteurs s'intéressent à la distribution et à l'exactitude des performances. Les enfants se répartissaient en deux catégories : ceux qui se focalisent sur la quantité (les "focuseurs", ce qui serait un prédicteur de réussite ultérieure en maths) et ceux qui ne le font pas. Seul le groupe des "focuseurs" était intéressant pour la question abordée : leur performance diminuait en fonction de la quantité (de 77 % à 46 %). À partir de quatre, les performances ne différaient pas du hasard. Ce résultat excluait que les enfants procèdent en utilisant le subitizing (car dans ce cas, la réussite aurait été la même pour les trois quantités : 1, 2 ou 3). Les enfants de 2-3 ans, qui ne comptent pas encore, sont donc capables de traitement séquentiel correspondant à la mise à jour d'ensembles non visibles. Les performances rapportées se rapprochent de celles décrites chez les peuplades d'Amazonie ne disposant pas de système verbal de dénomination des nombres.

a. Lipton, J.S., & Spelke, E.S. (2005). Preschool children's mapping of number words to nonsymbolic numerosities. *Child Development*, 76, 978-988. Wynn, K. (1990). Chidren's understanding of counting. *Cognition*, 36, 155-193. Sarnecka, B.W., & Lee, M.D. (2009). Levels of number knowledge during early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103, 325-337.

II L'apprentissage et l'utilisation de la numération décimale

Relativement peu de recherches ont porté sur l'apprentissage du système numérique écrit en chiffres arabes. Cette situation peut tenir d'abord à ce que le système décimal écrit est formellement simple : dix symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et un principe, la notation positionnelle. Par ailleurs, il donne lieu à un enseignement systématique, ce qui le fait considérer comme un apprentissage dépendant de l'instruction dispensée et non du développement de l'enfant. Les notations écrites sont généralement découvertes plus tardivement que les formes verbales des noms de nombres. Leur production pose aussi des problèmes spécifiques, notamment ceux du tracé des formes des chiffres à 5 ans [37]. Toutefois, la généralisation récente des affichages numériques (appareils ménagers, montres, téléphones portables) rend probable une acquisition au moins partielle des formes et de leurs significations ordinales et cardinales dès la moyenne section maternelle (MSM).

1 Des premiers apprentissages au transcodage

A Les premiers apprentissages

Des données récentes recueillies aux USA auprès d'enfants de 3 à 7 ans font apparaître des performances très supérieures à ce qui est généralement attendu. Kelly Mix et ses collaborateurs [38] ont demandé à des enfants (de Grande Section Maternelle, GSM, 61 mois, de CP, 74 mois et de CE_1, 86 mois) confrontés aux mêmes 20 quantités représentées à l'aide de blocs, de jetons, de chiffres : 1) de désigner de deux transcriptions en chiffres arabes, ou de deux constellations de jetons ou de deux blocs en base 10 lequel correspond à une dénomination verbale (lequel est /sisãtrwa/ ?) ; 2) de déterminer quelle notation ou représentation correspond à la plus grande quantité (par exemple 64 et 604). Les résultats montrent que tous les enfants, même les plus jeunes, font mieux que le hasard et que les performances s'améliorent en fonction du niveau scolaire (GSM : 66 %, CP : 81 % et CE_1 : 87 %). Surtout, les meilleurs scores sont relevés aux comparaisons de nombres transcrits en chiffres arabes (et non aux comparaisons de jetons). Ces données suggèrent que, dans l'environnement actuel, les enfants acquièrent de manière incidente des connaissances partielles mais non négligeables des formes et du fonctionnement du système indo-arabe. Il s'agit toutefois de connaissances portant sur les régularités formelles (la longueur, la présence de 0, etc.) mais non sur la signification des notations, au moins chez les plus jeunes (GSM).

Relativement aux relations entre le code indo-arabe et sa signification, des travaux anciens ont montré que les enfants de 4-5 ans n'éprouvent pas de grandes difficultés à associer les chiffres, y compris 0, à des quantités d'objets contenus dans des boîtes opaques. L'apprentissage de ces relations paraît donc à la portée des enfants de l'école maternelle sous réserve que des activités soient mises en place, qui favorisent la mobilisation de ces relations dans les deux sens (des quantités vers le code arabe, et réciproquement) [39].

37. Fischer, J-P. (2010). Vers une levée du mystère des écritures en miroir (des chiffres) chez l'enfant. *L'Année Psychologique*, 110, 227-251.

38. Mix, K.S., Prather, R.W., Smith, L.B., & Stockton, J.D. (2013) Young children interpretation of multidigit number names : From emerging competence to mastery. *Child Development*.

39. Hughes, M. (1986). *Children and number : Difficulties in learning mathematics*. New-York : Basic Blackwells. Munn, P. (1998). Symbolic function in preschoolers. In C. Donlan (Ed.). *The development of mathematical skills.* Hove : Psychology Press. Sinclair, A., Siegrist, F. & Sinclair, H. (1983). Young children's ideas about the written number system. In D. Rogers & J. Sloboda (Ed.), *The acquisition of symbolic skills.* New-York : Plenum Press.

Ainsi, des enfants de 3 à 5 ans établissent des relations entre les noms de nombres (NN), les chiffres arabes (CA) et les quantités représentées par des configurations de dés (de 1 à 6) (CD). Les enfants se voient présenter un item (NN, CA ou CD) et un ensemble de 6 items (CA, CD, ou NN) parmi lesquels ils doivent désigner le seul qui corresponde à ce qui leur est présenté. Chez les 3 ans, la réussite se limite aux appariements de petites quantités (de 1 à 3) entre NN et CD ; l'appariement entre CA et CD s'acquiert entre 3 et 4 ans et ne s'effectue pas par le biais du recours aux NN ; il y a donc mise en correspondance directe entre CA et CD. Les 5 ans réussissent tout. La recherche [40] n'a malheureusement pas été poursuivie jusqu'au nombre 9. Elle permet toutefois de considérer que l'apprentissage des chiffres arabes et de leur mise en relation avec les formes verbales et les quantités correspondantes est à la portée des enfants de l'école maternelle.

B Le passage à la dizaine et au-delà

Le passage des nombres à un chiffre aux nombres à deux puis trois puis n chiffres nécessite la mise en œuvre d'une nouvelle dimension : la valeur positionnelle des chiffres [41]. Cette connaissance ne se déduit pas de celle des noms de nombres. La compréhension de la notation positionnelle repose sur plusieurs connaissances : (a) la valeur d'un chiffre dépend de la place qu'il occupe dans le nombre, un vaut 1 dans la position la plus à droite mais 10 dans la suivante plus à gauche, puis 100 dans la suivante et ainsi de suite ; (b) la valeur de position croît de droite à gauche par puissances de 10 ; (c) la valeur d'un chiffre s'obtient en multipliant la valeur de ce chiffre (de 0 à 9) par la puissance de la base correspondant à la position qu'il occupe ; (d) la valeur totale est égale la somme des valeurs représentées par chaque chiffre. En résumé, l'utilisation de la notation écrite exige la manipulation de structures pluri-unitaires et leur mise en relation avec à la fois des dénominations orales et des séquences écrites [42] . Elle repose aussi sur le sens de ces structures, qui permet l'évocation ou le transcodage des quantités. Constance Kamii a demandé à des enfants et à des adultes de dessiner seize roues puis d'indiquer le nombre en chiffres arabes (16). Elle les a ensuite interrogés en ce qui concerne la quantité à laquelle renvoient respectivement le 6 puis le 1. Les réponses exactes ne surviennent que chez 12 % des enfants de 7 ans, 42 % des 9 ans et 78 % des élèves de lycées [43]. D'autres travaux, complémentaires, suggèrent que la fréquence des erreurs dépend de l'enseignement dispensé, et notamment de manipulations reposant sur la base 10 : la réussite rapportée atteint 63 % en CP (contre 32 % en CE_1 et CE_2 chez ceux qui n'ont pas suivi le programme), voire 44 % en CP et 85 % en CE_1 dans un programme expérimental mis en place en Belgique francophone [44]. Les données disponibles suggèrent que même les adultes éprouvent encore des difficultés à interpréter les valeurs associées aux positions des chiffres.

Ainsi [45] , les obstacles surviennent au moment où s'effectue le passage de 10. Ils sont particulièrement

40. Benoit, L., Lehalle, H., Molina, M., Tijus, C., & Jouen, F. (2013). Young children mapping between arrays, number words, and digits. *Cognition*, 129, 95-101.
41. Hurford, J.R. (1987). *Language and number*. Oxford : Basil Blackwell
42. Perret, J.F. (1985). *Comprendre l'écriture des nombres*. Berne, C.H : Peter Lang. Seron, X., Deloche, G.& Noël, M.P. (1992). Number transcribing by children. In J. Bideaud, C. Meljac & J.P. Fisher (Eds.), *Pathways to number*. Hillsdale, NJ : Erlbaum.
43. Kamii, C. (1990). *Les jeunes enfants réinventent l'arithmétique*. Berne : Peter Lang.
44. Noël, M-P. (2007). Le développement numérique. In A. Blaye et P. Lemaire (Eds). *Psychologie du développement cognitif de l'enfant* (174-176). Bruxelles : De Boeck.
45. Hughes, M. (1986). *Children and number : Difficulties in learning mathematics*. New-York : Basic Blackwells. Munn, P.

importants pour les enfants pratiquant les langues occidentales du fait que celles-ci ne font pas apparaître la base dix dès qu'elle le pourrait. Par exemple, en français, les mots *onze, douze*et *seize* ne permettent pas de percevoir facilement la décomposition en, respectivement, *dix et un, dix et deuxdix et six* comme en chinois ou en japonais (langues dans lesquelles 11 correspond à *dix un* ; 12 à *dix deux* ; 20 à *deux dix* ; et ainsi de suite). Cette absence de transparence de la base dix dans la dénomination a un impact négatif sur l'apprentissage de la transcription en chiffres arabes [46] . En français, ces difficultés se trouvent amplifiées lors de l'apprentissage des dizaines complexes (*soixante-douze ; quatre-vingt-treize*) en raison de l'irrégularité de la formation des formes verbales. Il suffit de comparer avec les formulations en wallon ou en romand - *septante, huitante, nonante* - et d'évaluer les différences de performance des enfants francophones de niveau CE_1 en Wallonie et en France [47]. Des épreuves ont été élaborées qui nécessitaient : 1) des productions allant de représentations physiques (avec des jetons colorés valant 1, 10 ou 100) aux codes verbal, oral ou écrit en chiffres arabes ; 2) une tâche de compréhension allant du code oral vers la représentation physique ; 3) des transcodages de différentes structures de la forme verbale (Unités, Dizaines, DU, CU, CDU...) vers l'écriture en chiffres ; 4) des comparaisons de quantités énoncées oralement (cent huit/ huit cents) et des jugements d'acceptabilité de formulations (peut-on dire "*quarante dix*" ?). Il s'agissait de rechercher si et comment les dizaines aux désignations complexes (*soixante-dix ; quatre-vingt-dix*) ont une influence sur les performances des enfants français par rapport aux enfants wallons. Les données ont effectivement montré que les enfants wallons de 7 ans traitent mieux les structures en 70 et 90 que les enfants français de mêmes âge et niveau (qui commettent des erreurs telles que 6012 pour transcrire *soixante-douze*) alors que les performances des deux groupes sont équivalentes avec les structures en 80 (et donnent lieu aux mêmes erreurs, par exemple 4204 pour transcrire *quatre-vingt-quatre*). Une recherche ultérieure conduite sur une population française plus large a montré que les difficultés rencontrées avec les structures complexes subsistent lorsque celles-ci sont intégrées dans des nombres plus grands (par exemple quand 73 est intégré dans 473 ou dans 5273) : les élèves peinent à traiter ces structures, notamment à les interpréter en termes de quantités (nombre de mille, centaines, dizaines et unités). Il n'est donc pas certain qu'une fois passées les difficultés initiales, les enfants traitent ces structures sans commettre d'erreurs. De fait, une étude portant sur les élèves les plus faibles (issus des ex classes de SES, devenues SEGPA : Section d'éducation spécialisée) a mis en évidence la persistance d'erreurs de traitement des grands nombres dans une épreuve d'écriture sous dictée (nombres : quatre cent quatre-vingt-quatorze ; deux mille trois) mais également la présence de ces mêmes erreurs dans la population contrôle de classe de sixième, mais avec une moindre fréquence (par exemple 4194 ou 414 ; 20003).

(1998). Symbolic function in preschoolers. In C. Donlan (Ed.). *The development of mathematical skills.* Hove : Psychology Press.

46. Miura, I., Okamoto, C.C. Kim, Steere & Fayol, M. (1993). First graders' cognitive representation of numbers and understanding of place value : Cross-national comparison - France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *Journal of Educational Psychology*, 85, 24-30 ; Miura, I., Okamoto, C.C. Kim, Steere & Fayol, M. Comparisons of children's cognitive representation of number : China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavioral Development*, 17, 401-411. Towse, J. et Saxton, M. (1998). Mathematics across national boundaries : Cultural and linguistic perspectives on numerixcal competencies. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 255-274). Hove, UK : Psychology Press.

47. Seron, X., & Fayol, M. (1994). Number transcoding in children : A functional analysis. *British Journal of Developmental Psychology*, 12, 281-300. Jarlegan, A., Fayol, M. & Barrouillet, P. (1996). De soixante-douze à 72 et inversement : Une étude du transcodage chez les enfants de sept ans. *Revue de Psychologie de l'Education*, 1, 87-108. Fayol, M. Barrouillet, P. & Renaud, A. (1996). Pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle aussi difficile ? *Revue de Psychologie de l'Education*, 1, 109-132.

Les erreurs de transcodage sont encore plus fréquentes lorsque les nombres comportent des zéros, surtout lorsque ces nombres nécessitent quatre chiffres ou plus dont un ou plusieurs zéros. Elles se manifestent par des ajouts ou des absences de zéros : ainsi six mille quatre cent deux peut être transcodé 60004002 ou encore 6004002 voire 642. Même lorsque la production est correcte, la vitesse de production est ralentie, ce qui traduit un accroissement des difficultés de transcription, y compris chez des adultes [48]. On ne peut donc exclure que certains élèves conservent des difficultés aux niveaux scolaires supérieurs et dans certaines tâches. Il s'ensuit que l'apprentissage de la numération indo-arabe nécessite en France un enseignement explicite systématique tenant compte de la taille des nombres et sans doute une évaluation précise et prolongée des performances. Une recherche des variables affectant la difficulté du transcodage a mis en évidence que deux dimensions sont particulièrement influentes : le nombre de chiffres et la longueur phonologique des expressions numériques (évaluée en nombre de syllabes). Ce constat suggère que les problèmes rencontrés par certains élèves tiennent, outre à leur incompréhension du fonctionnement de la notation de position, aux limitations de leur capacité de mémoire de travail [49]. En effet, celle-ci est fortement mobilisée lorsque les transcriptions portent sur des expressions phonologiques longues (quatre-vingt-trois mille six cent soixante-quinze - 10 syllabes pour une taille de 5 chiffres) alors même que les nombres transcrits comportent peu de chiffres : il suffit de comparer mille cent trois (3 syllabes et 4 chiffres) et cent quatre-vingt-dix-huit (6 syllabes et 3 chiffres) [50].

C En résumé : deux difficultés, la compréhension et la gestion des traitements

En résumé, l'apprentissage de la numération écrite ne soulève pas de problème particulier pour ce qui concerne les premiers chiffres (de 0 à 9) pour les enfants de 3 à 6 ans. Les difficultés commencent avec les nombres de onze à seize puis se poursuivent avec les dizaines (vingt, trente, etc.) et s'amplifient avec les formes irrégulières (soixante-dix ; quatre-vingt ; etc.) essentiellement du fait de la non transparence de la base dix en dénomination. Ces difficultés se manifestent dans la compréhension de la formation des expressions exprimant les nombres et dans certains des traitements comme les décompositions. Elles se traduisent souvent par des erreurs de transcodage (de l'oral vers les formes indo-arabes), notamment pour ce qui concerne les grands nombres et, plus encore, ceux qui nécessitent de recourir à des zéros intermédiaires (par exemple 23 045). Ces erreurs peuvent tenir à la fois de la compréhension insuffisante ou défectueuse de la formation des écritures de nombres (par exemple le rôle des zéros et leurs positions) et de contraintes de gestion en mémoire de travail des séquences verbales et de leur transcription. Afin de prévenir ou surmonter ces difficultés et éviter les erreurs, l'enseignement du transcodage, de la transcription et de la manipulation des suites verbales et écrites bénéficieraient d'une attention plus grande et plus prolongée portée aux compositions et décompositions (avec des blocs correspondant à la base dix et à ses multiples : plaques de 100, etc.) et à leur mise en relation avec les configurations de chiffres. Des activités pourraient également concerner plus spécifiquement le maintien en mémoire des suites verbales et leur transcription [51].

48. Lochy, A., & Censabella, S. (2005). Le système symbolique arabe : acquisition, évaluation et pistes rééducatives. In M-P. Noël (Ed.), *La dyscalculie*. Marseille : SOLAL

49. Voir Annexe A

50. Barrouillet, P., Camos, V., Perruchet, P., & Seron, X. (2004). ADAPT : A Developmental, Asemantic, and Procedural model for Transcoding from verbal to Arabic numerals. *Psychological Review*, 111, 368-394. Fayol et al., 1996 *ibid*.

51. Ho, C.S. et Fuson, K. (1998). Children's knowledge of teen quantities as tens and ones : Comparisons of Chinese, British, and American kindergartners. *Journal of Educational Psychology*, 90, 536-544.

2 Décimaux et fractions

Les données de la recherche montrent que la connaissance des fractions constitue une étape importante dans l'apprentissage des mathématiques[52]. En particulier, le niveau de performances évalué en classe de sixième est corrélé avec les réussites ultérieures en mathématiques au second degré. Les bilans des performances aux USA attestent que, bien que les fractions soient introduites en CE_2 ou CM_1, de nombreux adultes et élèves du second degré confondent les propriétés des fractions avec celles des nombres entiers[53]. Ainsi, Robert Siegler et ses collègues ont analysé les performances de deux cohortes, une au Royaume Uni ($n = 3\ 677$), l'autre aux USA ($n = 599$), d'élèves testés à 10-12 ans puis à 15-17 ans[54]. Pour chaque élève, les auteurs disposaient d'informations générales (âge, genre, fratrie), d'un niveau d'intelligence (QI verbal et non verbal), et de performances à différentes opérations (additions, soustractions, multiplications, divisions, fractions). Les résultats, bien que n'étant pas obtenus avec les mêmes épreuves, ont mis en évidence que les meilleurs prédicteurs (statistiques) des performances à 15-17 ans en mathématiques (une fois contrôlés statistiquement le QI et les variables démographiques) sont les connaissances des fractions et les performances aux divisions. Chacune de ces deux variables apporte une contribution indépendante. Cette première série de travaux fait donc ressortir deux conclusions. Premièrement, les connaissances (savoirs et savoir-faire) relatives aux fractions et aux décimaux restent fragiles chez les élèves du second degré et même chez les adultes. Deuxièmement, le niveau de ces connaissances est un prédicteur des performances ultérieures en mathématiques. Les travaux rapportés ci-après visent à déterminer l'origine des difficultés et fragilités et, plus rarement à les prévenir ou à y remédier.

A Recherches conduites auprès d'adolescents et d'adultes

Plusieurs recherches ont souligné que les propriétés des fractions (et des décimaux) diffèrent fortement de celles des nombres naturels. Les fractions expriment des valeurs qui ne peuvent l'être par des nombres entiers mais aussi conduisent à découvrir et apprendre des propriétés différentes de celles des nombres entiers. Tous les nombres entiers sont représentables par une seule écriture en chiffres, ont un successeur unique, ne diminuent jamais avec la multiplication et n'augmentent pas avec la division. Ces propriétés diffèrent de celles des nombres décimaux et des fractions. Toutefois, il est possible que les fractions, comme les autres nombres, expriment une grandeur ou une quantité susceptible d'être représentée sur une ligne numérique, tout comme c'est le cas avec les nombres naturels.

D'autres recherches ont mis en évidence que les enfants, et même les adultes, y compris les enseignants, rencontrent des difficultés pour comprendre les nombres rationnels et notamment les fractions. L'explication privilégiée de ces difficultés est actuellement celle de l'interférence avec les nombres naturels, dont l'origine fait l'objet de discussions. Les nombres naturels, acquis au début des apprentissages, interfèreraient avec les nombres rationnels lorsque ceux-ci sont abordés : les erreurs relevées chez les élèves et les adultes sont en général compatibles avec un traitement qui étend aux fractions et aux rationnels les propriétés des naturels. De fait, plusieurs des propriétés des nombres naturels ne sont plus respectées lors de l'introduction des

51. Cette partie a été rédigée en collaboration avec Jean-François Chesné

53. Pour une synthèse en français, voir Grégoire, J., & Meert, G. (2005). L'apprentissage des nombres rationnels et ses obstacles. In M-P. Noël (Ed.), *La dyscalculie*. Marseille SOLAL.

54. Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23, 681-697.

nombres rationnels, notamment quatre :

1. La détermination de la "taille" d'une fraction ne dépend ni du seul numérateur ni du seul dénominateur, pas plus que la "longueur du nombre décimal" n'est un indice de la "taille" (2,6 est plus grand que 2,5679). Ces caractéristiques sont en contradiction avec celles qui valent pour les naturels ;
2. Les opérations avec les naturels conduisent à attendre qu'additionner et multiplier produisent des augmentations, soustraire et diviser des diminutions des quantités initiales. Or, cela n'est plus que partiellement vrai avec les rationnels avec lesquels la multiplication par une fraction (ou un décimal) inférieure à 1 entraîne une diminution et la division par une fraction inférieure à 1 un accroissement ;
3. Alors que les naturels n'ont qu'une seule manière d'être représentés, les rationnels peuvent l'être de différentes manières : 0,75 ; 0,750 ; 3/4 ; 75/100 ; 9/12, etc. ;
4. Alors que les naturels sont discrets, les rationnels sont denses : une infinité de rationnels peut être intercalée entre deux nombres rationnels distincts. Beaucoup de chercheurs considèrent que les élèves sont confrontés à un changement conceptuel lors de l'apprentissage des rationnels, et que beaucoup ne le réussissent pas complètement, encore chez les adultes. Ces constats ont amené les chercheurs à étudier dans le détail les connaissances, les savoir-faire (ou procédures) et les dimensions conceptuelles disponibles et mobilisés par les élèves et les adultes lors des traitements relatifs aux fractions et aux décimaux.

Plusieurs recherches ont exploré à la fois les performances aux opérations et les représentations des fractions en utilisant la ligne numérique ou les comparaisons de fractions [55]. Les fractions sont-elles traitées comme les nombres entiers naturels en ce qui concerne la représentation mentale ? Sont-elles associées à une représentation analogique intégrée, capable de rendre compte des interférences avec les caractéristiques spatiales, du recouvrement des représentations adjacentes et de la localisation dans le cortex visuo-spatial ? La question se pose relativement aux fractions car elles sont infiniment divisibles, non reliées par un successeur et une infinité de fractions peut être intercalée entre deux fractions. Enfin, la taille des fractions n'augmente pas de manière cohérente avec la taille de leurs numérateurs et dénominateurs. Pour déterminer si les fractions donnent lieu à une représentation correspondant à celle de la ligne numérique, les auteurs demandent aux participants de comparer à 3/5 des séries de fractions : d'abord, 2/9, 2/7, 3/8, 4/9, etc. puis des fractions comportant des nombres à deux chiffres : 20/97, 1/4, 26/89, 30/91, 28/71, 31/72, etc. L'effet de distance, caractéristique des comparaisons réalisées sur les entiers naturels (plus deux nombres sont distants plus leur comparaison est rapide et exacte) se retrouve avec les fractions, non seulement au niveau du groupe mais aussi chez les individus. Les fractions seraient donc représentables sur une ligne numérique analogique, ce qui les fait apparaître en continuité avec les entiers.

Robert Siegler et ses collaborateurs ont également demandé à de futurs enseignants, à des élèves de second degré de 6$^{\text{ème}}$ au 8e grades et à des étudiants d'une grande université de : a) placer sur une ligne numérique : de 0 à 10000 des nombres entiers (857, 5 762, 8 645) ; puis sur une ligne allant de 0 à 1 des fractions (1/19, 1/7, 1/4, et 12/13) et sur une ligne de 0 à 5 (1/19, 4/7, 7/5, et 9/2) ; b) résoudre les 4 opérations (+, -, ×, :) avec 3/5 combiné aux nombres suivants 1/5, 1/4, 2/3, and 4/5 (par exemple, pour la soustraction 3/5 - 1/5, 3/5 - 1/4, 2/3 - 3/5, and 4/5 - 3/5) ; c) comparer sans calculer des opérations

55. Schneider, M., & Siegler, R.S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance*, 36 (5), 1227-1238.

(les 4) comportant toutes des opérandes plus petits que 1 avec un résultat présenté (par exemple a/b + b/d > a/b vrai ou faux ?) [56]. Les étudiants de l'université réussissent aussi bien les calculs de fractions que les tâches de jugements portant sur l'effet des opérations impliquant des fractions < 1. En revanche, les élèves de second degré et les futurs enseignants réussissent les opérations (+, -, ×, /) et les placements sur les lignes numériques mais achoppent souvent sur les jugements d'effet des opérations associées aux fractions < 1 (× et :). Ainsi, même les adultes futurs enseignants (aux USA) ne maîtrisent pas complètement les fractions sur le plan conceptuel alors qu'ils effectuent sans erreurs les procédures de calcul.

Siegler et ses collaborateurs ont également abordé la question de l'apprentissage des fractions chez les élèves de 12 à 14 ans [57] (de la sixième à la quatrième). Selon eux, cet apprentissage représente un défi pour les élèves car comprendre les fractions nécessite à la fois la capacité de mettre en œuvre des procédures de résolution mais aussi la disponibilité de connaissances conceptuelles. Pour évaluer le niveau de maîtrise et son évolution chez les élèves du début de l'enseignement secondaire, les auteurs constituent deux groupes (Faibles F versus Bons B) et les confrontent à différentes épreuves : évaluation de fractions sur une ligne numérique (de 0 à 1 : 1/19, 2/13, 1/5, 1/3, 3/7, etc ; de 0 à 5 : 1/5, 7/8, 11/7, 9/5, 13/6, etc.) ; comparaison de grandeurs (comparer à 3/5 : 2/7, 1/3, 5/11,etc.) ; résolution des 4 opérations avec des fractions (3/5 avec 1/5, 1/4, 2/3, et 4/5) ; connaissance de la résolution de divisions (56 : 8, 306 : 9, and 91 : 4 : réponses attendues de types 22,75 ou 22 $\frac{3}{4}$) ; épreuves standardisées en maths et lecture ; épreuves de capacités générales : attention, etc.). Les performances des Faibles sont inférieures de celles de Bons dès la Sixième, mais la différence entre les deux groupes augmente fortement entre Sixième et Quatrième. Le placement des fractions sur la ligne numérique a est très fortement corrélé avec les différences interindividuelles pour le traitement des fractions comme pour les performances mathématiques globales, même après contrôle statistique du niveau en lecture et des capacités générales. Les performances aux divisions ont également un poids important, ce qui s'explique par le fait que les fractions et les divisions sont logiquement équivalentes.

B Recherches portant sur des élèves de l'école élémentaire

Nos collègues belges ont étudié les performances d'enfants allant du CE_2 à la classe de Sixième à une épreuve de comparaison de décimaux dans laquelle ils faisaient varier la longueur de la suite après la virgule (1, 2 ou 3 chiffres : 0,1 ; 0,01 ; 0,001), la taille des chiffres (1, 2, 3 : 0,1 ; 0,2 ; 0,3) et les présence et place du zéro (immédiatement après la virgule 0,01 ou en fin de nombre 0, 10) [58]. Les élèves travaillaient sur papier et recevaient 80 comparaisons de nombres décimaux. Les élèves étaient regroupés en fonction de leurs profils de performances. Les résultats suggèrent une évolution qui irait progressivement d'une conception naïve inspirée des connaissances relatives aux entiers vers une connaissance plus conforme à celle des adultes (qui réussissent !). Ainsi, les élèves de CE_2 (qui n'ont pas encore reçu d'enseignement concernant les fractions, qui ne commence qu'en fin de CM_1) et encore ceux de CM_1 tendent à penser que les nombres "les plus longs" sont les plus grands (4, 345 plus grand que 4,4), ce qui se retrouve mais à un moindre degré en

56. Siegler, R.S., & Lortie-Forgues, H. (2015 in press). Conceptual knowledge of fraction arithmetic. *Journal of Educational Psychology*

57. Siegler, R.S., & Pyke, A.A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49 (10), 1994-2004.

58. Desmet, L., Grégoire, J., & Mussolin, C. (2010). Developmental changes in the comparison of decimal fractions. Learning and Instruction, 20, 521-532.

CM_2. Les élèves de CE_2 et CM_1 sont très influencés par la "longueur des nombres" et répondent de manière erronée lorsque la réponse est non congruente avec cette "longueur" (0,1 conçu comme plus petit que 0,02). Les CM_2 font mieux mais commettent encore beaucoup d'erreurs. Enfin, les CE_2 et les CM_1 considèrent que les nombres comportant un zéro final sont les plus grands (3,400 plus grand que 3,5). Cet effet perdure chez les plus âgés.

Peu de travaux ont consisté à mettre en place des interventions et à en évaluer les effets. Comme les interventions ne s'adressent ni aux mêmes publics ni aux mêmes âges ni ne se déroulent dans les mêmes systèmes scolaires, l'analyse comparative de leurs résultats doit se faire avec prudence. Une première série de travaux s'adresse à des enfants de niveau CP. Elle s'appuie sur les données qui suggèrent que les jeunes enfants (3-5 ans) ont une intuition pré-symbolique des fractions [59]. Des enfants voient des portions ($1/4$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$) d'éponges circulaires placées dans des cercles. Puis des portions sont ajoutées ou retirées ($1/4$ par exemple) et les enfants doivent choisir la configuration obtenue parmi quatre possibilités. Les performances sont comparées à celles qu'obtiennent les mêmes enfants avec des quantités entières. Ces travaux montrent que les enfants de 4 et 5 ans réussissent au-delà du hasard, mais pas ceux de 3 ans. Par ailleurs, les performances sont meilleures avec les quantités entières qu'avec les quantités fractionnaires, mais l'évolution des deux est parallèle (les deux s'améliorent dans les mêmes proportions).

Le fait que les enfants jeunes aient une intuition (perceptive ?) des fractions conduit à envisager d'introduire très tôt un enseignement sur cette notion. À notre connaissance, une seule recherche a décrit l'évolution des performances et des conceptions d'enfants de CP (grade 1) confrontés à un enseignement portant sur les fractions simples [60]. En particulier, les élèves développent initialement des conceptions erronées que les enseignants vont entreprendre de faire évoluer au cours de séances dispensées sur plusieurs semaines. Par exemple, le travail commence par la lecture d'une histoire dans laquelle 12 gâteaux doivent être partagés entre un nombre croissant d'enfants. La première stratégie proposée par les enfants consiste en des partages en deux répétés. Lorsqu'ils doivent partager en trois, ils partagent deux fois en deux, et énoncent moitié, demi, quart mais jamais tiers. Après "échanges et instruction", ces erreurs et procédures disparaissent : les enfants s'appuient sur les relations parties/tout. Ils découvrent que plus le nombre de personnes impliquées dans le partage s'élève, plus les parts sont petites. Ils uniformisent l'usage du langage. Ils réalisent comment évolue la taille des morceaux, et donc la notion d'unité. Malheureusement, aucun suivi ne permet d'évaluer les effets à court et moyen terme de cet enseignement précoce. L'étude de cas présentée laisse entière la question de la généralisation auprès des enseignants d'une approche complexe faisant appel à des dispositifs matériels et à des modalités d'interaction nécessitant une grande expertise pédagogique.

La plupart des travaux porte sur la période allant du CE_2 au CM_2 (ou à la sixième). Deux suivis longitudinaux ont permis de mettre en évidence les variables, spécifiques aux mathématiques (le placement sur la droite numérique, la résolution des divisions longues, etc.) et générales (le niveau d'attention, le niveau en lecture, etc.) qui influent significativement sur l'apprentissage ultérieur des fractions [61]. Les deux

59. Mix, K. S., Levine, S.C. et Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, 35, 164-174

60. Empson, S.B. (1999). Equal sharing and shared meaning : The development of fraction concepts in a first-grade classroom. *cognition and Instruction*, 17 (3), 283-342.

61. Jordan, N. C., Hansen, N., Fuchs, L. S., Siegler, R. S., Gersten, R., & Micklos, D. (2013). Developmental predictors of fraction concepts and procedures. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, 45-58. Hansen, N., Jordan, N.C., Fernandez,

types de variables ont un impact du CE_2 au CM_1 puis du CM_2 à la Sixième, leur poids étant plus élevé pour prédire les acquisitions conceptuelles que pour les apprentissages de procédures, sans doute du fait que ces dernières nécessitent des capacités supplémentaires. Ces données ont permis d'adapter les modalités d'intervention.

Ainsi, pour essayer de prévenir les échecs lors de l'apprentissage des fractions, un groupe de chercheurs a mis en place un programme destiné aux élèves de CM_1 considérés comme à risque[62]. L'intervention (12 semaines) a mis l'accent sur la dimension conceptuelle des fractions introduites comme des mesures pouvant être comparées, ordonnées, placées sur un segment gradué (une ligne numérique graduée de 0 à 1). Différentes évaluations ont été effectuées en pré-test comme en post-test, portant sur des savoirs et savoir-faire mathématiques mais aussi sur des capacités générales (mémoire, attention, etc.). Par comparaison avec le groupe contrôle (classes utilisant une pratique usuelle), les différences pré-test/post-test diminuaient avec le groupe entraîné. L'impact des variables générales (attention, mémoire) n'était attesté qu'avec le groupe contrôle (effets modérés, de l'ordre de 1 à 3% de variance), mais pas avec le groupe entraîné, comme si les entraînements conceptuels parvenaient à compenser les différences interindividuelles. Les améliorations se marquent particulièrement sur le plan conceptuel. L'absence de suivi ne permet pas d'évaluer les effets à court et moyen termes.

Un autre programme a été conçu et mis en place avec des élèves de 10-11 ans (CM_1). Les auteurs ont repensé le curriculum en cherchant à s'appuyer sur les connaissances naïves disponibles chez les enfants et en confrontant ces derniers à des situations fournissant des opportunités de manipuler les fractions et de comprendre leurs relations avec les décimaux et les pourcentages. Le dispositif retenu est un récipient (= 100, référence aux pourcentages, que les élèves rencontrent dans leur vie quotidienne) que les élèves peuvent remplir d'eau en s'appuyant sur des proportions privilégiées par division (par 2 : 50, 25) et par composition (75 = 50 + 25). Les auteurs utilisent aussi une "notation à doubles décimales", par exemple 1, 2525 correspond à 1 + 0,25 + 0,0025 et se situe entre 1,25 et 1,26. Le curriculum est mis en place avec 16 élèves de CM_1 (avec un groupe contrôle de 13 élèves appariés) sur une période de 5 mois (une leçon par semaine). Les deux groupes utilisent le même texte de référence et ce sont les enseignants habituels qui poursuivent leur travail. L'évaluation se fait à l'aide d'un pré-test (41 items) et d'un post-test (45 items). Les comparaisons des deux groupes confirment que le groupe confronté au nouveau curriculum progresse plus que le groupe contrôle, mais celui-ci améliore aussi ses performances. Les progrès affectent toutes les dimensions évaluées : les comparaisons, les sériations, la résolution des problèmes. Le nouveau curriculum semble induire chez les élèves un apprentissage plus approfondi des dimensions conceptuelles associées aux fractions et aux décimaux. Toutefois, là encore, l'absence de suivi n'autorise pas de conclusion quant à la stabilité et à la pertinence des acquis pour les apprentissages ultérieurs.

Enfin, une dernière recherche a envisagé la question des acquisitions relatives aux fractions au cours moyen en les inscrivant dans une perspective d'apprentissage à partir de 5 jeux différents et présentant chacun quatre niveaux de difficulté[63]. Ces jeux sont pratiqués en petits groupes à raison de 2 séances

E., Siegler, R.S., Fuchs, L., Gersten, R., & Micklos, D. (2015).General and math-specific predictors of sixth-graders knowledge of fractions. *Cognitive Development*, 35, 34-49.

62. Fuchs, L.S., Schumacher, R.F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C.L., Cirino, P.T., Jordan, N.C., Siegler, R.S., Gersten, R., & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. Journal of Educational Psychology, 105, 683-700.

63. Gabriel, F., Coche, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2012). Developing children's understanding of

de 30 min par semaine. Là encore, l'accent est mis sur la dimension conceptuelle. Les pré-test et post-test (identiques) évaluent les dimensions conceptuelles (estimation, comparaison, droite numérique) et procédurales (additions, soustractions, multiplications). Le groupe confronté aux jeux progresse plus que le groupe contrôle bien que ce dernier améliore aussi ses performances en relation avec l'enseignement suivi. Les progrès sont associés à une forte amélioration de la motivation et les auteurs ses demandent si elle ne suffirait pas à expliquer les progrès. Toutefois, la progression supérieure du groupe jeux par rapport à l'autre ne vaut que pour les connaissances conceptuelles, pas pour les connaissances procédurales. Là non plus, les auteurs de la recherche n'ont pas effectué de suivi des élèves.

Au total, l'ensemble des recherches mentionnées ayant mis en place des interventions ont plutôt réalisé des études de cas introduisant des aménagements de curricula ou de dispositifs et portant sur des populations limitées. L'accent est presque toujours mis sur les connaissances conceptuelles, les auteurs arguant de ce que l'enseignement usuel privilégie la dimension procédurale. La question des codes (les notations) utilisés pour indiquer les statuts des nombres et opérations (/ ; −; %, etc) n'est jamais abordée alors qu'elle intervient également dans l'acquisition des connaissances. Les améliorations de performances portent toujours sur la dimension conceptuelle, ce qui est cohérent avec les perspectives adoptées. Toutefois, les relations entre savoirs conceptuels et savoir-faire restent peu envisagées. Enfin, l'absence systématique de suivi des élèves ayant participé à ces interventions et des groupes contrôles appariés rend difficile à évaluer la pertinence et l'efficacité des interventions.

III Les opérations

Les opérations arithmétiques consistent à utiliser et combiner des symboles suivant des règles (addition, soustraction, multiplication, etc.) plutôt que de réaliser des transformations effectives (ajouter, enlever, partager, itérer, etc.) portant sur les quantités concrètes correspondant à ces symboles. À l'issue des traitements symboliques, le résultat obtenu doit être équivalent à celui auquel aurait abouti la manipulation des entités concrètes (ajouter, enlever, partager, itérer, etc.). Par exemple, la résolution de 23 - 16 = 7 assure que, si 16 passagers d'un car qui en transportait initialement 23 étaient descendus de celui-ci, 7 personnes se trouveraient encore dans le véhicule. Les enfants doivent découvrir que la **manipulation réglée des symboles aboutit au même résultat que l'application concrète des transformations**. Il leur faudra ensuite comprendre que la manipulation des symboles autorise des "libertés" de traitement facilitant la résolution des opérations. Ainsi, intuitivement, si 18 personnes montent dans le précédent car qui en transporte déjà 7, chacun des deux nombres correspond à des situations différentes, l'une des quantités est statique et initiale (les 7 passagers déjà en place) alors que l'autre correspond à un ajout survenant ensuite. Pourtant la procédure la plus efficace pour trouver le nombre total de passagers consiste à effectuer 18 + 7. Ceci est possible du fait que l'addition est commutative (a + b = b + a). La découverte conceptuelle de propriétés des opérations arithmétiques (commutativité, inversion de l'addition et de la soustraction, associativité) constitue une étape importante dont le développement reste mal connu.

L'apprentissage et la mise en œuvre des opérations arithmétiques - addition, soustraction, multiplication et division - nécessitent la prise en compte de trois dimensions. Premièrement, chacune des opérations s'ap-

fractions : An intervention study. *Mind, Brain, and Education*, 6 (3), 137-146.

plique dans des conditions particulières, parfois intuitivement simples -l'addition pour traiter un ajout d'une quantité à une autre, la division pour un partage en collections égales - mais quelquefois complexes. Des **connaissances conceptuelles** doivent donc être mobilisées pour appréhender les situations, sélectionner la ou les procédures (ou stratégies) pertinente(s) et gérer leur mise en œuvre en temps réel. Cette mise en œuvre s'appuie sur la connaissance de certains **faits** arithmétiques ne nécessitant pas de calcul (par exemple, que 4 + 4 font 8 ou que 3 x 4 = 12) [64] et sur celle de procédures parfois très sophistiquées, des **algorithmes**, suites d'étapes à appliquer en suivant rigoureusement l'ordre et les règles, comme pour la résolution des additions ou des multiplications avec retenues. Les relations entre ces trois composantes - conceptuelle, procédurale et factuelle - sont complexes. Elles ont été abordées en analysant la manière dont les enfants appréhendent et résolvent des problèmes divers en fonction des contraintes des situations (par exemple lorsque la durée de résolution est réduite ou que l'exactitude des réponses est focalisée) et des capacités des individus (connaissance préalable de certains faits, par exemple $2 + 2 \rightarrow 4$), lesquelles évoluent en fonction de l'âge et/ou de l'expérience scolaire.

Le modèle le plus abouti (SCADS) est celui élaboré par Robert Siegler qui prend en considération une base de connaissances (sous forme d'associations entre types de problèmes, paires d'opérandes et résultats), un éventail de stratégies (utiliser les doigts, compter verbalement, décomposer, récupérer en mémoire la réponse, etc.) et permet de concevoir de manière probabiliste les performances à un moment donné du développement, l'évolution de ces performances en fonction des expériences et des changements affectant les capacités, mais aussi l'apparition de nouvelles stratégies [65]. Une dimension reste insuffisamment étudiée, celle qui concerne les interventions et leurs effets à court et moyen termes [66].

1 Les opérations simples

A Des manipulations aux opérations

Les jeunes enfants (et même les bébés) manifestent une compréhension intuitive des transformations, ajouts et retraits, affectant les grandeurs et les quantités, par exemple en paraissant "surpris" lorsque les résultats des transformations ne correspondent pas à ce qui était attendu (par exemple quand un ajout n'entraîne pas l'augmentation de quantité attendue). Dès l'âge de 3 ans, ils sont en mesure de manipuler des objets pour répondre à des questions telles que "combien font 2 gâteaux et 1 gâteau ?". Pour cela, ils concrétisent chaque nombre par un ou plusieurs objets, procèdent à la réunion matérielle et dénombrent en comptant la collection résultante. Un peu plus tard, vers 4 et 5 ans, les enfants utilisent souvent le comptage sur les doigts ou le comptage verbal pour faire face à de telles situations. Ainsi, avant tout enseignement formel, beaucoup d'enfants traitent des situations arithmétiques simples d'ajouts et de retraits de quantités

64. Voir Annexe B

65. Shrager, J., & Siegler, R.S. (1998). SCADS : A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science*, 9 (5), 405-410. Siegler, R. S., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In R. V. Kail (Ed.), *Advances in child development and behaviour*. Oxford, UK : Elsevier. Pour des synthèses, voir Gandini, D., & Lemaire, P. (2005). La résolution d'opérations arithmétiques au cours du développement. In M.P. Noël (Ed.), *La dyscalculie*. Marseille : SOLAL et Lemaire, P., Duverne, S., & El Yagoubi, R. (2003). Le développement des stratégies en situation de résolution de problèmes arithmétiques. In J. Bideaud et H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques chez l'enfant*. Paris : Hermès

66. Mais voir Brissiaud, R. (2002). Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques chez l'enfant*. Paris : Hermès Lavoisier.

correspondant à de petites quantités (inférieures à 5 ou 10) à l'aide du comptage [67]. Leurs stratégies dérivent de leur habileté préexistante à énoncer la chaîne des noms de nombres et à dénombrer des collections. Un consensus existe selon lequel, pour traiter des transformations simples comme 3 + 2 ou 4 - 2, les enfants disposent de cinq stratégies : l'utilisation d'objets, le comptage sur les doigts, le comptage verbal, les décompositions et enfin, la récupération directe en mémoire du résultat [68].

Les transformations évoquées ou effectuées sont souvent assimilées à des additions et soustractions, comme si les jeunes enfants disposaient de connaissances arithmétiques. Or plusieurs observations conduisent à réfuter cette assimilation. Premièrement, les enfants de 3 à 6 ans résolvent mieux les situations-problèmes lorsque celles-ci sont facilement "imaginables" (c'est-à-dire simulables par des modèles mentaux), par exemple lorsqu'elles portent sur de petites quantités (inférieures à 3) et lorsqu'elles leur sont présentées sous format non-verbal (en effectuant les transformations sous leurs yeux) plutôt que verbalement (sous forme de petites histoires) [69]. Deuxièmement, au même âge (et parfois au-delà), ces mêmes enfants échouent quand ils sont confrontés à des situations difficiles à simuler mentalement, par exemple lorsqu'un problème simple nécessite de rechercher un état initial (Alain avait des billes. Il en a perdu 3. Il en a maintenant 5. Combien en avait-il avant de commencer la partie ?) : l'absence de l'état de départ constitue un obstacle à la représentation de la situation [70]. Enfin, de manière générale, la stratégie de résolution retenue dépend de la sémantique du problème posé : "Alain a 4 billes, il en donne 2 à Pierre, combien lui en reste-t-il ?" est préférentiellement résolu par une stratégie qui consiste à séparer 2 billes de la collection de 4. En revanche, le problème "Jules a 4 billes, Louis a 2 billes, combien Jules a-t-il de billes de plus que Louis" l'est par mise en correspondance terme à terme des billes des deux ensembles [71].

La variabilité d'emploi des stratégies et leur étroite liaison initiale avec les situations décrites suggèrent que l'arithmétique intuitive des enfants de l'école maternelle repose pour une large part sur une représentation analogique des situations-problèmes qu'ils ont à traiter. Le recours au matériel (jetons, etc.), l'utilisation des doigts ou le comptage verbal leur permettent de simuler ces situations et les procédures de base aboutissant le plus souvent à la résolution. Ce constat soulève l'importante question du statut des transformations réalisées par les enfants et des résultats obtenus. Certains auteurs considèrent qu'il s'agit d'opérations arithmétiques (addition, soustraction). Or, cette dénomination est vraisemblablement abusive : les enfants, et particulièrement les plus jeunes, ne font pas appel aux additions ou soustractions. Ils simulent mentalement des situations et manipulent pour cela des modèles mentaux, ce qui conduit à s'interroger sur le passage des transformations en acte aux opérations arithmétiques. Le recours aux opérations se manifeste lorsque la manipulation des symboles qui correspondent aux quantités comme ceux qui

67. Siegler, R. S., & Jenkins, E. (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum. Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development : Research and practical applications*. Washington, DC : American Psychological Association.

68. Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction : A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum. Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesch & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes*. New York : Academic Press.

69. Huttenlocher, J., Jordan, N. C., & Levine, S. C. (1994). A mental model of early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology : General*, 123, 284-296. Hughes, M. (1981). Can preschool children add and subtract ? Educational Psychology, 1, 207-219.

70. Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

71. Voir pour une synthèse : Fayol, M., Thevenot, C., & Devidal, M. (2005). Résolution de problèmes. In M-P. Noël (Ed.), *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant*. Marseille : Solal.

sont associés aux opérations (+, -) devient relativement autonome par rapport aux transformations. Par exemple, dans le problème exposé plus haut (Alain avait des billes. Il en a perdu 3. Il en a maintenant 5. Combien en avait-il avant de commencer la partie ?), la transformation évoquée (il en a perdu 3) est un retrait, alors que l'opération arithmétique à effectuer pour la résolution est une addition (5 + 3). En d'autres termes, l'opération arithmétique ne correspond pas directement à la transformation concrète. Quelles sont les connaissances conceptuelles (commutativité, associativité, etc.) et procédurales nécessaires pour que les enfants parviennent à cette relative autonomie des traitements symboliques ?

B Les propriétés des opérations

Plusieurs auteurs ont étudié quand et comment s'élaborent les connaissances conceptuelles (commutativité, associativité, etc.) permettant aux enfants d'aboutir à une relative autonomie des traitements symboliques. Trois propriétés ont été particulièrement abordées : l'inversion addition-soustraction (a + b = c → a = c - b) et multiplication-division (a : b = c → a = b × c) ; la commutativité de l'addition ($a + b = b + a$) et de la multiplication ($a \times b = b \times a$) ; l'associativité de l'addition et de la multiplication ($a + (b + c) = (a + b) + c$). Plusieurs épreuves ont été utilisées. Par exemple, les enfants doivent résoudre une opération de type a - b = c puis une autre de type b + c = ? La question revient à déterminer si la présentation de la première facilite la résolution de la seconde par rapport à une condition contrôle où la seconde est présentée seule. Certains auteurs n'évaluent que la réussite, d'autres prennent en compte les temps de résolution. D'autres enfin ne demandent pas de résolution mais un simple jugement concernant la pertinence de la procédure mise en œuvre par une marionnette résolvant l'opération en utilisant ou non la référence à la première opération [72]. Plusieurs recherches ont été conduites, qui aboutissent à des résultats cohérents portant sur les enfants de 6 à 12 ans. Une méta-analyse portant sur quelque 750 participants (14 études) rapporte que la résolution d'opérations incluant une **inversion** (a + b - b), susceptibles d'être résolues sans calcul, est plus exacte et rapide que celle d'opérations standards ($a + b - c$) pour lesquelles le comptage est nécessaire . Toutefois, d'une part, la résolution de $a + b - b = a$ par l'application de $b - b = 0$ n'est pas généralisée (les enfants n'exploitent pas aussi souvent $b - b$ avec les grands nombres !), d'autre part, seule une minorité d'enfants court-circuite les calculs, enfin, le pourcentage d'enfants utilisant l'inversion ne progresse que très peu au cours de l'école élémentaire. Seule influe la modalité de présentation : les performances sont meilleures avec des situations concrètes (des objets) qu'avec des énoncés verbaux ou avec des séries de nombres. Les épreuves de jugement (est-il plus pertinent d'effectuer $b - b$ ou de calculer $a + b = c$ puis $c - b$?) montrent les mêmes tendances que les épreuves de production. Les recherches portant sur l'**associativité** sont plus rares et montrent que son emploi est également peu fréquent pour traiter des suites telles que 6 + 25 - 22 (le calcul 25 - 22 = 3 suivi de 6 + 3 = 9 est plus efficient que celui qui consiste à effectuer 6 + 25 = 31 puis 31 - 22 = 9 !). Seulement un quart des élèves de Sixième y recourent. Dans une épreuve au cours de laquelle ils doivent estimer l'efficacité relative des deux procédures (25 - 22 = 3 suivi de 6 + 3 = 9 versus 6 + 25 = 31 puis 31 - 22 = 9), ils ne sont que 59 % à préférer la

72. Bisanz, J., & LeFevre, J. (1990). Strategic and nonstrategic processing in the development of mathematical cognition. In D.F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies : Contemporary views of cognitive development*. Hillsdale, NJ : Erlbaum. Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction : Inversion, identity, decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74, 194-212 Canobi, K. H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93. Siegler, R. S., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries : A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology : General*, 127, 377-397.

première.

C Les additions

L'essentiel des recherches a porté sur l'évolution des procédures mises en œuvre par les enfants pour résoudre les additions, et dans une moindre mesure, les soustractions. Concernant les additions, entre la résolution par manipulation d'objets et la récupération directe en mémoire d'un résultat (3+2→5) s'intercalent des procédures variées et successives dont l'application dépend du niveau de difficulté des quantités impliquées et de la pratique des opérations : comptage avec des entités physiquement manipulables d'abord, comptage mental plus ou moins accompagné de l'usage des doigts ensuite. Les enfants simulent les situations à partir du premier nombre fourni (2 + 4 → 23456) puis à partir du plus grand des deux (2 + 4 → 56 ; procédure dite du $min.\ m,\ n$), ce qui nécessite le recours à la commutativité avant même que celle-ci ait été enseignée voire même fasse l'objet d'une prise de conscience. Vers l'âge de 5 ans, les enfants disposent ainsi d'un éventail de procédures différentes (ou stratégies) qu'ils déploient de manière adaptative en fonction de la difficulté des opérations et du contexte. Lors de la résolution d'additions simples [73], la récupération en mémoire serait utilisée (souvent avec des erreurs) dans 64% des cas, le comptage assisté ou non des doigts dans respectivement 15% et 8% des cas et, enfin, le recours aux doigts pour simplement représenter les quantités dans 13% des cas. Par ailleurs, d'autres types de différences interindividuelles se manifestent : les "bons" en arithmétique tendraient à retrouver en mémoire le résultat de 4 + 3 alors que les "perfectionnistes" recourraient au comptage, mental ou à l'aide des doigts, qui assure une plus grande exactitude au prix d'une moindre rapidité [74]. Enfin, selon que le contexte incite à l'exactitude ou à la vitesse, le même enfant peut tantôt récupérer un résultat éventuellement erroné en mémoire tantôt dénombrer laborieusement pour éviter une erreur. C'est vraisemblablement alors que les manipulations physiques puis mentales deviennent, progressivement ou brutalement nous l'ignorons, des opérations : le traitement symbolique se libère des contraintes des situations dans des conditions encore mal connues.

L'évolution ci-dessus décrite s'interprète facilement comme un passage graduel d'une procédure de comptage initialement lente, coûteuse en attention et sujette à erreurs à une récupération directe en mémoire de résultats automatiquement activés par la présentation des opérandes [75]. Cette récupération, d'abord limitée aux opérations les plus simples (2 + 2 ; 2 + 3) s'étend ensuite aux plus complexes [76] comme (3 + 5). Elle n'élimine toutefois ni la disponibilité des procédures antérieurement élaborées – les étudiants des USA ne récupèrent en mémoire que dans 71 % des cas [77] – ni le montage de nouvelles procédures, par

73. Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction : How do children know what to do ? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills.* Hillsdale, NJ : Erlbaum.

74. Siegler, R.S. (1988). Individual differences in strategy choice : Good students, not-so-good students, and perfectionnists. *Child Development*, 59, 833-851.

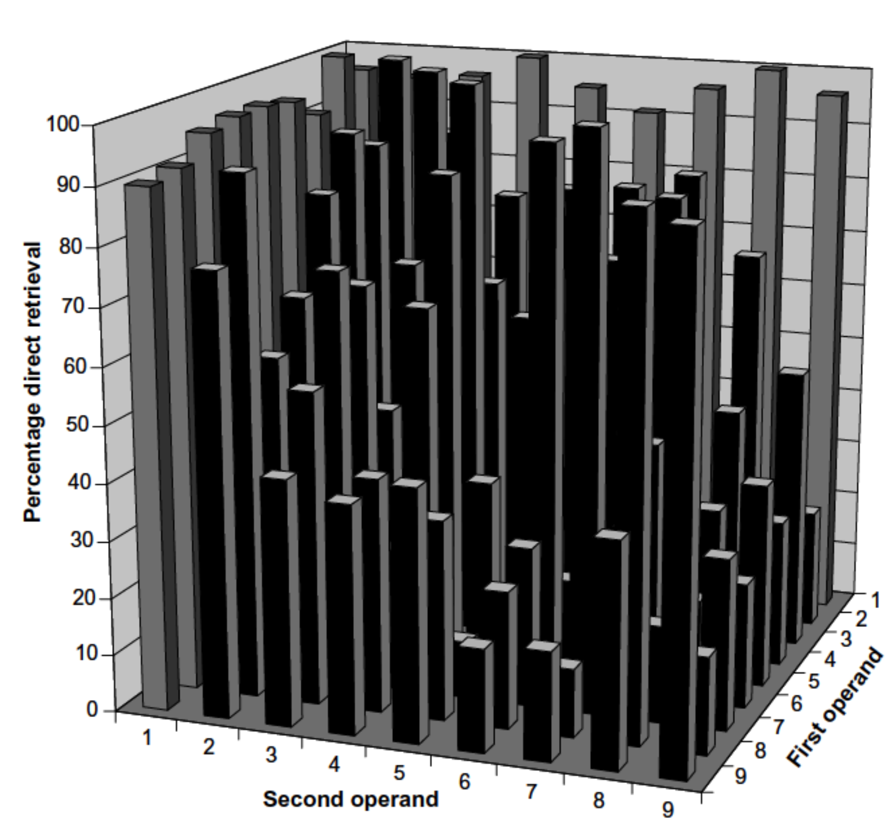
75. Barrouillet, P. & Fayol, M. (1998). From algorithmic to direct retrieval. Evidence form number- and alphabetic-arithmetic in children and adults. *Memory & Cognition*, 26, 355-368 ; Logan, G.D. (1988). Toward an instance theory of automatization. *Psychological Review*, 95, 492-527 ; Logan, G.D. & Klapp, S.T. (1991). Automatizing alphabet arithmetic : I. Is extended practice necessary to produce automaticity ? *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 17, 179-195.

76. Lemaire, P., Barrett, S., Fayol, M., & Abdi, H. (1994). Automatic activation of addition and multiplication facts in elementary school children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 57, 224-258.

77. Lefevre, J., Sadesky, G.S., & Bisanz, J. (1996). Selection of procedures in mental addition : Reassessing the problem size effect in adults. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 22, 216-230. Fayol, M., & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems. *Cognition*, 123, 392-403.

exemple de décomposition (37 + 29 → 37 + 30 - 1). En 4^e année primaire, en France, elle ne concerne que les plus petites additions, comme l'illustre la figure ci-dessous :

Figure 4 – Pourcentages de récupération directe en mémoire des résultats des additions simples en fonction de la taille des opérandes chez des élèves de CM$_1$



D'après Barrouillet, P., & Lépine, R (2005). Working memory and children's use of retrieval to solve addition problems. *Journal of Experimental Child Psychology*, 91, 183-204.

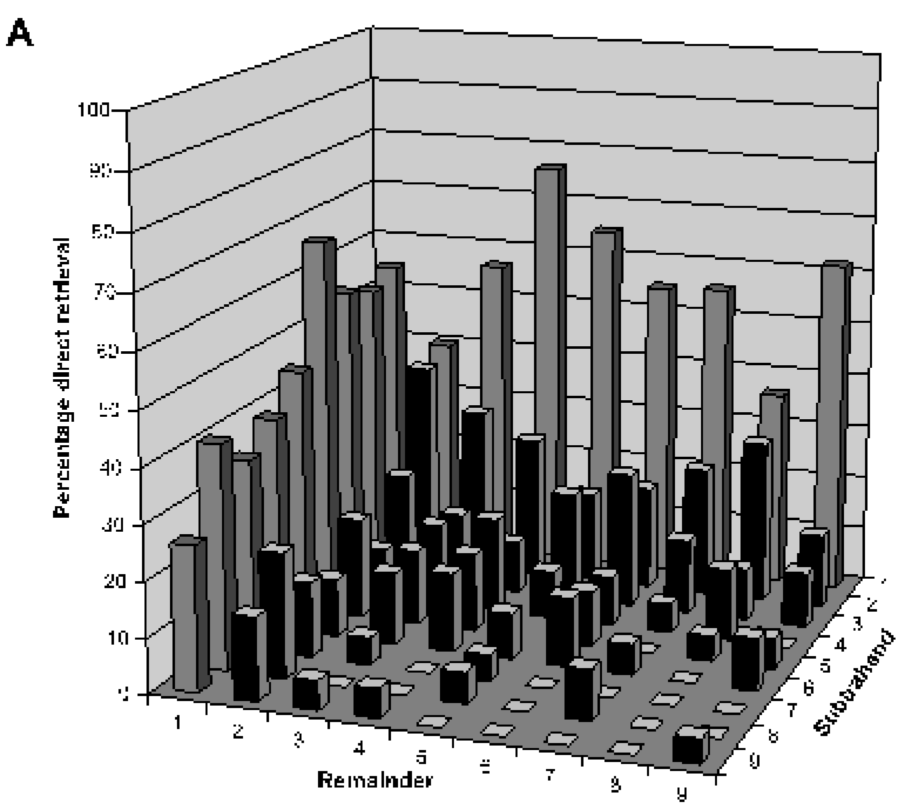
D Les soustractions

Le développement de la résolution des soustractions suit le même patron que celui décrit ci-dessus pour la résolution d'additions. Les enfants utilisent d'abord des aides externes pour résoudre les problèmes de retrait ou de diminution puis semblent intérioriser peu à peu les procédures correspondantes. Pour traiter un problème de la forme $m - n =?$, ils partent soit de m et décrémentent du nombre de pas correspondant à n (5 - 2 → 5, 4) soit de n, et incrémentent jusqu'à m : le nombre de pas parcourus constitue la réponse au problème[78] (3, 4, 5 → 3 pas pour résoudre 5 - 2). À partir du milieu de la scolarité élémentaire, les

78. LeFevre, J. A., DeStefano, D., Penner-Wilger, M., & Daley, E. (2006). Selection of procedures in mental subtraction. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 60, 209-220. Svenson, O., & Hedenborg, M. L. (1979). Strategies used by children when solving simple subtractions. *Acta Psychologica*, 43, 477-489. Barrouillet, P., Mignon, M., & Thevenot, C. (2008). Strategies in subtraction roblem solving in children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 99, 233-251. Ostad, S.A. (1999). Developmental progression of subtraction strategies : a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, 14(1), 21-36.

enfants utilisent l'une ou l'autre des méthodes de manière adaptative en fonction des situations décrites et de leurs propres capacités. Pour les soustractions simples, lorsque m et n sont inférieurs à 10, ils comptent à partir de n lorsque m est inférieur à $2n$ et à partir de m lorsque celui-ci est supérieur à $2n$. Ils minimisent ainsi le nombre de pas à compter. Ils sont également en mesure de récupérer certains résultats en mémoire à long terme, principalement avec les petits opérandes ($m = n + 1$ et $m = 2n$). Toutefois, les données disponibles attestent que la récupération reste rare pour la résolution des soustractions, comme l'illustre la figure ci-dessous. Même les adultes opèrent par récupération de l'addition correspondante : le traitement de 12 - 8 = ? s'appuie sur l'addition 8 + 4 = 12. La comparaison à un même niveau scolaire (CE$_2$) des performances de résolution des additions et des soustractions fait apparaître des différences systématiques : les soustractions sont moins bien résolues que les additions, elles le sont plus lentement, et les procédures mobilisées diffèrent : la récupération en mémoire survient dans 19 % des cas contre 65 % pour les additions alors que le recours aux algorithmes l'emporte pour les soustractions (plus de 50 %).

Figure 5 – Pourcentages de récupération directe en mémoire des résultats des soustractions simples en fonction de la taille des opérandes chez des élèves de CE$_2$



D'après Barrouillet et al., 2008 ibid.

L'interprétation de ces différences évoque le plus souvent les effets de la pratique. C'est l'utilisation fréquente d'une opération qui permettrait d'établir en mémoire une association forte des opérandes et de leur résultat. Ainsi, une moindre utilisation de la soustraction que de l'addition suffirait à expliquer que, même chez les adultes, cette dernière soit résolue par récupération de résultats plutôt que par recours à des procédures de comptage ou de décomposition. La résolution des soustractions resterait, elle, traitée majoritairement par des procédures de comptage (avant ou arrière) ou par récupération de l'addition correspondante (13 - 6 = ? active l'addition 6 + 7 = 13)[79].

E Les multiplications

La multiplication peut être envisagée comme une addition itérée (4 + 4 + 4 + 4 + 4) ou comme une relation entre deux quantités. Elle est enseignée soit sous la première forme soit en s'appuyant sur les suites de multiples (3, 6, 9, 12, etc.) soit en travaillant la mémorisation directe des tables (cas le plus fréquent ?). L'étude des performances des enfants et adultes confrontés aux multiplications élémentaires a mis en évidence la manière dont les uns et les autres mémorisent (ou non) puis récupèrent des associations nombreuses et très proches les unes des autres et, donc, très interférentes[80].

Plusieurs séries de données rapportent les résultats testant la connaissance des multiplications élémentaires concernant les opérandes allant de 2 à 9 chez des enfants ou des adultes[81]. Ces données sont stables et valables pour des populations variées, ce qui suggère que, malgré plusieurs années de pratique, les individus produisent des erreurs ayant les mêmes caractéristiques. Premièrement, plus les produits sont grands et plus les erreurs et les durées de résolution augmentent, c'est l'effet de taille qui explique une part très importante des variations de performances[82]. Deuxièmement, certaines tables sont plus faciles que d'autres, notamment celles de 2 et de 5. Troisièmement, les erreurs relevées se situent dans 70 % à 80 % des cas parmi les résultats apparaissant dans les tables, et le plus souvent dans celles d'au moins un des opérandes : ainsi, à l'opération 6 × 4, les participants, même les enfants ou adultes en difficulté, répondent parfois 36, 28, ou 16 mais pratiquement jamais 31, 26 ou 17. On peut en inférer que les individus recherchent et retrouvent en mémoire les résultats (associations entre opérandes et produits) et qu'ils commettent des erreurs au cours de cette récupération. Ces erreurs sont associées à des durées de réponse longues, traduisant une recherche en mémoire ou un calcul prolongés, et non une réaction rapide correspondant à un manque d'attention.

Deux interprétations non mutuellement exclusives sont classiquement invoquées pour rendre compte de ces résultats. La première impute les erreurs à une mémorisation défectueuse. Les individus produiraient des réponses erronées au cours de l'apprentissage, qui seraient stockées en mémoire et seraient d'autant plus facilement mobilisées que souvent produites. En conséquence, il faudrait veiller à ce que l'apprentissage s'effectue le plus possible sans erreurs. La seconde interprétation attribue l'apparition d'erreurs à l'organisation des connaissances en mémoire. Un consensus entre chercheurs existe pour considérer que les multiplications élémentaires sont stockées en mémoire sous forme de réseaux d'associations entre opérandes

79. Campbell, J.I.D., & Alberts, N.M. (2010). Inverse reference in adults-elementary arithmetic. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 64(2), 77-85

80. Healy, A.F., Fendrich, D.W., Crutcher, R.J., Wittman, W.T., Gesi, A.T., Ericsson, K.A., & Bourne, L.E. (1992). The long term retention of skills. In A. Healy, S. Kosslyn, & R. Shiffrin (Eds.), *From learning process to cognitive processes : Essays in honor of Wiliam K. Estes* (Vol. 2, pp. 87-118). New York : Psychology Press.

81. Par exemple, Barrouillet, P. & Fayol, M. & Lathulière (1997). Selecting between competitors in multiplication tasks : An explanation of the errors produced by adolescents with learning difficulties. *International Journal of Behavioral Development*, 21, 253-275. Wheeler, L.R. (1941). A comparative study of the difficulty of learning the multiplication combinations. *The Journal of Genetic Psychology*, 59, 189-206 ; voir aussi Campbell, J.I.D. (1987). The role of associative interference in learning and retrieving arithmetic facts. In J.A. Sloboda & D. Rogers (Eds). *Cognitive processes in mathematics*. Oxford : Clarendon Press.

82. Thomas, H.B.G. (1963). Sources of difficulties in learning arithmetical facts. *Nature*, 4888, 99.

(4 et 6) et résultat(s) (24). La présentation des opérandes induirait une activation de ces triplets, mais aussi des triplets voisins (par exemple 3×6 et 5×6 ainsi que 6×6 et 6×7). Des interférences sont donc inévitables, ce qu'étayent les données relatives aux erreurs : outre la taille des produits, le nombre de produits associés à un même résultat (qui est un indice d'interférence par exemple 3×4, 4×3, 2×6 et 6×2 pour 12) induisent un accroissement des erreurs. L'attestent également les expériences qui montrent que l'entraînement d'adultes, certes accélère la résolution des multiplications et diminue les erreurs, mais ne modifie pas l'allure des durées relatives de résolution : les produits les plus difficiles le restent, et ce sont précisément ceux qui correspondent au plus grand nombre d'associations interférentes[83]. Les recherches utilisant l'électroencéphalographie[84] , qui permettent de tracer la diffusion de l'activation cérébrale en fonction du temps, confirment que, lors de la présentation de paires d'opérandes (3 5), plusieurs produits correspondant aux deux opérandes sont très rapidement activés (par exemple $12 \rightarrow 3 \times 4$; $20 \rightarrow 4 \times 5$), même en l'absence de signe indiquant l'opération à effectuer. Dans un deuxième temps, seul le résultat correct est sélectionné, les autres étant inhibés.

F Les divisions

Les recherches distinguent plusieurs familles de divisions. Par exemple, si des enfants (15) doivent être répartis sur 5 tables et qu'il s'agit de déterminer combien ils seront par table, la situation est dite partitive (combien d'éléments par partie). Si les enfants (15) doivent être répartis à raison de 5 par table et qu'il faut déterminer le nombre de tables, la situation est dite quotitive (combien de parties). Lorsque les données jouent un rôle symétrique (les longueurs des côtés dans le calcul de l'aire d'un rectangle par exemple), un seul type de division est mobilisé. Les recherches ont porté sur la plus ou moins grande facilité de compréhension des situations et sur les procédures mises en œuvre. Elles ont surtout porté sur des enfants de 10 à 14 ans et des adultes et ont principalement cherché à déterminer comment les uns et les autres résolvaient ces opérations tardivement enseignées et moins bien réussies que les autres (en moyenne, chez les 12-13 ans, le taux de réussite aux multiplications s'élève à 75% contre seulement 31% pour les divisions).

Comme pour la résolution des autres opérations, plusieurs stratégies ont été identifiées relativement aux divisions simples, par exemple 63 : 9 : additions itérées ($9 + 9 + 9$ jusqu'à obtenir 63 et dénombrer le nombre d'itérations) ; récupération en mémoire du résultat, essentiellement relevée avec les petites divisions (6 : 2 par exemple) ; référence à la multiplication correspondante ($24 : 6 \rightarrow 6 \times ? = 24$). Cette dernière procédure est très fréquente chez les adultes, sauf pour les petites divisions et les doubles qui seraient directement remémorées ($6 : 3 \rightarrow 3 \times 2$). De manière générale, les performances aux divisions sont corrélées aux performances aux multiplications : cette corrélation varie entre opérations simples ($r = 0{,}78$) et complexes ($r = 0{,}56$) et se révèle d'autant plus élevée que les élèves sont habiles à résoudre ces opérations[85]. Toutefois, les relations inverses entre multiplications et divisions ($a : b = c \rightarrow a = b \times c$) et leur mobilisation pour résoudre des opérations (telle que $(4 \times 6) : 6$) apparaissent moins fréquentes, moins rapides et moins

83. Voir Annexe B : les faits numériques.

84. Galfano, G., Rusconi, E. & Umiltà, C. (2003). Automatic activation of multiplication facts : Evidence from the node adjacent to the product. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 56A, 31-61. Galfano, G., Penolazzi, B., Vervaeck, I., Angrilli, A., & Ulmità, C. (2009). Event-related brain potentials uncover activation dynamics in the lexicon of multiplication facts. *Cortex*, 45, 1167-1177.

85. Huber, S., Fischer, U., Moeller, K., & Nuerk, H-C. (2013). On the interrelation of multiplication and division in secondary school children. *Frontiers in Psychology*, 4, article 740.

exactes qu'avec les situations additives et soustractives [86].

Les performances des enfants s'améliorent en exactitude et en vitesse en fonction du niveau scolaire. Les élèves de CM_1 tendent à utiliser souvent les additions itérées, lentes et coûteuses en attention. La récupération reste rare à ce niveau. Comme chez les adultes, les divisions sont résolues par l'intermédiaire de la multiplication [87] . En fait, on dispose de très peu de travaux relatifs à la division effectuée mentalement. Il s'agit d'une opération tardivement enseignée et dont les rares études ont porté sur la résolution sous format écrit. À notre connaissance, une seule recherche a effectué un suivi longitudinal des apprentissages d'enfants de CM_2 confrontés pendant 8 semaines à une série de divisions afin de recenser les stratégies mises en œuvre et leur évolution. Les auteurs rapportent que les stratégies varient fortement (en moyenne les élèves ont utilisé 3 stratégies à chaque séance) mais ne se regroupent pas par catégories. L'évolution des stratégies se manifeste par une augmentation des récupérations, une stabilité du recours à la multiplication et une diminution faible des additions et des procédures particulières. Bien que la récupération soit à la fois la plus exacte et la plus rapide, le recours à la multiplication reste le plus utilisé. La différence avec la récupération n'est sans doute pas suffisante pour que cette dernière se révèle plus efficiente et soit de plus en plus sélectionnée [88] .

G Conclusion

En résumé, le traitement des situations arithmétiques s'appuie initialement sur des représentations mentales analogiques de ces situations qui permettent de manipuler quasi-perceptivement les entités évoquées et de parvenir à des réponses exactes. Cela limite toutefois les types de situations susceptibles d'être ainsi abordées et la généralisation à des grandeurs et quantités plus grandes. L'accès aux opérations au sens propre paraît relativement tardif, limité et caractérisé par de fortes différences interindividuelles. On connaît mal l'évolution et les conditions - y compris relatives aux effets de l'instruction - qui conduisent à l'utilisation systématique des opérations arithmétiques, de l'addition à la division. Par ailleurs, des différences très importantes séparent les trois dimensions associées à chacune des opérations. Les dimensions conceptuelles et leur évolution ont été plutôt moins approfondies que les deux autres, beaucoup reste à faire. Les connaissances factuelles (faits numériques) ont donné lieu à des travaux inspirés par la neuropsychologie puis conduits dans une perspective de développement et d'apprentissage. Les principales difficultés qui leur sont associées sont bien identifiées ainsi que leurs origines. En revanche, les modalités d'intervention, notamment en vue de prévenir les difficultés d'encodage et de récupération restent insuffisamment explorées. Les connaissances procédurales ont été les plus étudiées, en partie en raison de l'intérêt que présente l'hypothèse d'une transition systématique des procédures vers les faits numériques. Les recherches portant sur

86. Robinson, K.M., & Ninowski, J.E. (2003). Adults'understanding of inversion concepts : How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division problems ? *Canadian journal of Experimental Psychology*, 57, 321-330

87. Mauro, D.G., LeFevre, J-A. & Morris, J. (2003). Effects of problem format on division and multiplication performance : Division facts are mediated via multiplication-based representations. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 29, 163-170. Dubé, A.K., & Robinson, K.M. (2010). Accounting for individual variability in inversion shortcut use. *Learning and Individual Differences*, 20, 687-693. Robinson, K.M., Arbuthnott, K.D., Rose, D., McCarron, M.C., Globa, C.A., & Phonexay, S.D. (2006). Stability and change in children's division strategies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93, 224-238.

88. Robinson, K.M. & Dubé, A.K. (2008). A microgenetic study of simple division. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 62, 156-162.

les procédures impliquées dans le traitement des opérations posées sont moins explorées, même en ce qui concerne les tout-débuts de leur apprentissage. Au-delà de cette phase, la question de la pertinence de leur enseignement se trouve posée en raison de la présence massive des calculatrices. Enfin, le domaine le moins abordé concerne les relations entre concepts, procédures et faits numériques. La complexité des situations et celle des évolutions décrites rendent difficile les expérimentations. Il serait sans doute nécessaire de mettre plus l'accent sur les interventions en utilisant l'apprentissage comme un moyen d'analyser l'organisation en mémoire, l'évolution des procédures et celle des concepts [89].

2 Les opérations posées

Les opérations posées peuvent concerner de petits nombres à deux ou trois chiffres, avec ou sans retenue. La situation se complique lorsque les opérandes comportent plusieurs chiffres. Ceci vaut pour les quatre opérations. Les travaux conduits dans les années 90 ont notamment montré que d'assez nombreux enfants, d'une part, échouent à résoudre ces opérations mais surtout, inventent des procédures erronées (des *bugs*) très difficiles à éradiquer une fois installées [90]. Ces *bugs* traduisent le fait que les élèves n'ont pas compris certaines des bases de la numération écrite et qu'ils élaborent des sortes d'algorithmes qui leur sont propres, qui ressemblent partiellement à ceux qui sont pertinents mais qui ne conduisent que rarement à la réponse exacte (voir Tableau 4 pour des exemples).

Les enfants se voient enseigner une série d'algorithmes permettant de résoudre toutes les additions, soustractions, multiplications et divisions. Ces algorithmes, conventionnels, diffèrent d'un pays à un autre. Ils ont évolué au cours de l'histoire de manière à permettre des calculs exacts et efficients généralisables à tous les nombres. Le plus souvent, leur conception et leur mise en œuvre sont éloignées des bases conceptuelles sous-jacentes ou celles-ci sont difficiles à mettre en relation avec le déroulement des étapes successives. Par exemple, seuls certains résultats intermédiaires sont explicitement notés, ce qui rend plus difficile la compréhension. Leur but est en effet de réduire les calculs complexes à une série de calculs plus simples à exécuter selon des procédures bien connues et combinées entre elles : des algorithmes.

Karen Fuson a cherché à comprendre les origines de ces erreurs et à découvrir les moyens de les prévenir ou d'y remédier. Elle a suggéré l'importance de disposer d'un matériel comportant des unités, des dizaines (des réglettes intégrant 10 unités), des centaines (des plaques de cent unités), etc. Elle a défendu l'idée de coupler les manipulations de ce matériel avec le codage positionnel des chiffres arabes et les déplacements et substitutions de chiffres. Elle rapporte que cette approche permet d'éviter l'apparition d'erreurs. Elle prône aussi de laisser les jeunes élèves élaborer eux-mêmes leur propre mode de codage pour qu'ils comprennent le fonctionnement du code arabe. Les données rapportées suggèrent que des enfants de première ou de deuxième années primaires inventent des codages qui parfois ne peuvent pas convenir à l'objectif de résolution des opérations mais qui sont quelquefois pertinents et plus simples que ceux qui leur

89. Voir les travaux conduits par Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills*. Hove UK : Psychology Press. Dowker, A. (2005). *Individual differences in arithmetic*. Hove UK : Psychology Press.

90. Brown, J.S. & Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, 155-192.1978 ; Young, R.M. & O'Shea, T. (1981). Errors in children's subtraction. *Cognitive Science*, 5, 153-177. Van Lehn, K. (1983). On the representation of procedures in repair theory. In H.P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.

sont enseignés (*standard school-taught*) . Il en va de même pour les multiplications et les divisions [91]. Le raisonnement de ces chercheurs est que la disponibilité des calculettes rend moins importante la maîtrise des algorithmes conventionnels. Les élèves peuvent donc être incités à élaborer leurs propres procédures en vue de leur assurer une meilleure compréhension du système décimal et de son fonctionnement. Lyn English et Graeme Halford donnent de nombreux exemples détaillés des dispositifs susceptibles d'être utilisés pour à la fois représenter des grands nombres et pour opérer sur eux (additions, soustractions, multiplications et divisions). Toutefois, peu de données empiriques sont disponibles, qui étaieraient l'importance du recours à des blocs et à leurs manipulations en associations avec la mise en correspondance avec des symboles (chiffres) [92] . Comme il existe des algorithmes différents selon les pays et même à l'intérieur d'un même pays, il est difficile d'évaluer la pertinence et l'efficacité des propositions, d'autant qu'une fois maîtrisée, chacune permet la réussite. Tout un travail reste à effectuer en ce qui concerne les apprentissages.

Figure 6 – Types de bugs rencontrés dans la résolution de soustractions écrites

TYPES DE BUGS	EXEMPLES		
1- Soustraire systématiquement le plus petit chiffre au plus grand	345 -102 --- =243 (juste)	345 -129 --- =224 (faux)	207 -169 --- =162 (faux)
2- Donner zéro comme résultat quand le chiffre à soustraire est « trop grand »	245 -102 --- =243 (juste)	345 -129 --- =120 (faux)	207 -169 --- =100 (faux)
3- Soustraire systématiquement le plus petit chiffre au plus grand quand un zéro est présent au rang suivant	345 -102 --- =243 (juste)	345 -129 --- =216 (juste)	207 -169 --- = 42 (faux)
4- Donner zéro comme résultat quand le chiffre à soustraire est « trop grand » avec un zéro = présent au rang suivant	345 -102 --- =243 (juste)	345 -129 --- =216 (juste)	207 -169 --- = 40 (faux)

91. Fuson, K. C., & Burghardt, B.H. (2003). Multidigit addition and subtraction methods invented in small groups and teacher support of problem solving and reflection. In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*. Mahwah, NJ : Erlbaum. Ambrose, R., Baek, J-M., & Carpenter, T.P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. In A.J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills*. Mahwah, NJ : Erlbaum.

92. English, L.D., & Halford, G.S. (1995). *Mathematics education. Models and processes*. Mahwah NJ : Lawrence Erlbaum

Annexes

Annexe A La mémoire de travail (ou MT)

La cognition mathématique implique différentes dimensions : encoder les informations perceptives (des nombres écrits au tableau), les transformer en représentations internes, comparer, calculer, transcrire, etc. Toutes ces activités sont susceptibles de mobiliser les deux composantes principales de la mémoire : la mémoire dite à long terme (ici après MLT) stockant nos connaissances académiques, autobiographiques et nos savoir-faire (nager, lire..) ; la mémoire de travail (ou MT) permettant de maintenir **temporairement** des informations sous différents formats (phonologique MTV, visuo-spatial MTVS...) tout en leur affectant de l'attention et en effectuant sur elles des traitements qu'elle active, coordonne et contrôle par le biais d'un système exécutif (SE). Par exemple, elle permet de conserver en mémoire deux opérandes le temps d'en effectuer la somme par le biais de décompositions et de sommes partielles ($37 + 25 \rightarrow 30 + 20 = 50$ puis $7 + 5 = 12$ puis $50 + 12 = 62$). La question du rôle de la MT en mathématiques est à la fois ancienne et d'actualité. Elle se pose du fait que les mathématiques, comme toute activité complexe, mobilisent des composantes différentes (des concepts, des faits et des procédures) dont les activations et les désactivations doivent être orchestrées dans le temps alors même que les capacités de maintien et de traitement temporaires sont très limitées chez les êtres humains. Ces limites de capacités ont pour conséquence que, lorsque le nombre d'informations à prendre en considération les dépasse, certaines des informations peuvent être négligées (par exemple les retenues peuvent être négligées) ou des traitements peuvent ne pas être effectués (oubli d'une opération) ou réalisés de manière erronée, conduisant à des erreurs. Par exemple, en dépit de connaissances conceptuelles bien attestées, des enfants de 4 ans confrontés à des problèmes additifs et soustractifs ($a + b$ et $a - b$) échouent à les résoudre dès que la quantité à manipuler mentalement dépasse leur capacité de mémoire temporaire [93].

Plusieurs conceptions de la MT existent [94]. Aucune n'est étroitement associée à un modèle des traitements mathématiques. Nous avons retenu le modèle de Alan Baddeley [95] car, d'une part, il est celui qui sert le plus souvent de référence dans les recherches en mathématiques et, d'autre part, il s'articule relativement facilement avec le modèle anatomo-fonctionnel élaboré par Stanislas Dehaene qui distingue trois composantes (verbale, visuo-spatiale et analogique) impliquées dans les traitements numériques [96]. Dans un tel modèle, la MT peut être impliquée pour maintenir, contrôler, réguler [97] l'activation (et l'inhibition)

93. Klein, J., & Bisanz, G. (2000). Preschoolers doing arithmetic : The concepts are willing but the working memory is weak. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 2000, 54, 105-115.

94. Fenesi, B., Sana, F., Kim, J.A., & Shore, D.I. (2015). Reconceptualizing working memory in educational research. *Educational Psychology Review*, 27, 333-351.

95. Baddeley, A. D. (2012). Working memory : theories, models, and controversis. *Annual Review of Psychology*, 63, 129.

96. Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. et Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506. Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions. The Year in Cognitive Neuroscience. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 232-259. En français : Dehaene, S., et Cohen, L. (2000). Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale. In M. Pesenti et X. Seron (Eds.), *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres*. Marseille : SOLAL.

97. LeFevre, J-A., DeStefano, D., Coleman, B., & Shanahan, T. (2005). Mathematical cognition and working memory. In Campbell (Ed.), *Handbook of numerical cognition*. New York : Academic Press. Pour des synthèses en français concernant la mémoire de travail : Noël, M-P. (2004). Contraintes mnésiques dans le calcul chez l'adulte et l'enfant en développement. In M-N. Metz-Lutz, E. Demont, C. Seegmuller, M. de Agostini, & N. Bruneau (Eds.), *Développement cognitif et troubles des apprentissages*. Marseille : SOLAL et Geary, D.C. (2005). Les troubles d'apprentissage en arithmétique : Rôle de la mémoire de travail et des connaissances conceptuelles. In M-P. Noël (Ed.), *La dyscalculie*. Marseille : SOLAL

des informations et mobiliser les procédures. Pourtant les recherches relatives au rôle de la MT restent plutôt rares, peut-être parce que les différents modèles des traitements mathématiques ne s'y réfèrent pas directement.

Quelles que soient les conceptions de la MT, le contrôle central des traitements y joue un rôle fondamental ; le stockage et le traitement sont limités par d'une part, des capacités générales, telle la capacité d'attention ou la vitesse et, d'autre part, des caractéristiques associées au domaine spécifique, par exemple la disponibilité de stratégies de résolution. Plus les individus sont jeunes, plus les dimensions générales importent car l'éventail des stratégies mobilisables est réduit. Avec le développement de l'expertise, la pratique du domaine aboutit à l'accroissement des procédures ou stratégies et à la constitution en MLT d'organisations internes (par exemple des réseaux d'associations entre opérandes et résultats) qui interagissent avec les processus de la MT. L'évolution allant des dimensions générales aux organisations de connaissances et de stratégies reste décrite de manière sommaire, en partie en raison de la rareté des recherches étudiant les apprentissages à court et moyen termes.

Les données relatives aux relations globales ou relatives aux composantes de la MT et mathématiques sont de plusieurs types : données corrélationnelles étudiant dans quelles mesures les données sont reliées entre elles ; données expérimentales cherchant à établir l'existence de liaisons causales entre performances en MT et en mathématiques ; recherches visant à intervenir sur la MT et à étudier l'impact de telles interventions sur les performances académiques (incluant les mathématiques) ; plus récemment, travaux faisant appel à l'imagerie cérébrale pour préciser les aires et réseaux cérébraux impliqués dans les divers traitements et leur évolution.

Données corrélationnelles.

Les variations de MT sont associées à des variations dans de nombreuses activités, ce qui peut conduire à invoquer soit une capacité générale unique assimilable aux SE (inhibition, changement de tâche, mise à jour d'information, gestion de buts, récupération stratégique en MLT) soit l'impact de composantes spécifiques (MTVerbale ou MTVisuo-Spatiale par exemple). Ces différences sont déjà perceptibles chez les enfants dans la mesure où l'organisation de la MT apparaît semblable dès 4 ans à celle des adultes [98]. Les récentes méta-analyses portant sur les relations entre MT et performances mathématiques confirment que la MT et ses différentes dimensions corrèlent significativement avec les performances mathématiques entre 4 et 12 ans, même après avoir pris en compte (partialisé) le QI, le langage, la lecture, etc. [99]. Les corrélations les plus élevées concernent la mise à jour verbale (updating). Le poids des relations varie en fonction de la complexité des tâches à effectuer, qui dépend pour les opérations de la taille des opérandes, du nombre de chiffres des opérandes et la présence ou non de retenues. Tout se passe comme si la difficulté pour le traitement en MT était liée au nombre d'étapes requises pour résoudre un problème ou une opération. Ainsi, retrouver directement en mémoire exige une seule étape ; en conséquence, les demandes en MT ne sont pas reliées à la taille des nombres. Les problèmes plus complexes nécessitent plus d'étapes et les demandes

98. Gathercole, S.E., Pickering, S.J., Ambridge, B., & Wearing, H. (2004). The structure of working memory from 4 to 15 years of age. *Developmental Psychology*, 40 (2), 177-190.

99. Friso-van den Bos, I., van der Ven, S.H.G., & Kroesbergen, E.H. (2013). Working-memory and mathematics in primary schooml children : A meta-analysis. *Educational Research Review*, 10, 29-44. Cragg, L., & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics : The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in Neuroscience and Education*, 3, 63-68.

en MT augmentent en conséquence [100]. On aurait donc une relation directe entre nombre et difficulté des étapes et charge en mémoire. Ces résultats restent insuffisants dans une perspective qui cherche à établir l'éventualité de relations causales entre MT et performances en mathématiques.

Recherches visant à établir des relations causales.

Les données les plus nombreuses attestent qu'à un moment donné du développement, les performances aux différentes composantes de la MT sont significativement corrélées aux résultats en mathématiques, soit globalement (scores académiques) soit à des épreuves spécifiques (résolution de problèmes, opérations). Par exemple, l'évolution des relations entre la résolution des quatre opérations et les composantes MTV versus MTVS se révèle plus complexe qu'il n'était attendu [101]. La MT joue-t-elle un rôle causal ? Conditionne-t-elle l'apprentissage de savoirs ou savoir-faire (procédures) nouveaux ? Pour répondre à cette question, les chercheurs ont mis en place d'une part, des études longitudinales évaluant l'effet des différences interindividuelles de MT (et de ses composantes) sur les apprentissages et, d'autre part, des expériences visant à contrôler ou améliorer les capacités de MT et à estimer les impacts correspondants sur les performances en mathématiques. De manière générale, deux résultats ressortent. Premièrement, les capacités de MT influent très fortement sur l'apprentissage des procédures ou stratégies. Les enfants ayant de faibles capacités de MT ont une forte probabilité d'échouer en mathématiques [102]. Le contrôle de la capacité en MT ou l'introduction d'une tâche secondaire (conserver en mémoire des séries de lettres) simulant une réduction de la MT montrent que les taux d'erreurs et les temps de résolution augmentent lorsque la capacité de MT diminue et cela d'autant plus que les empans de MT sont faibles. Cela vaut pour la résolution des additions comme pour celle des soustractions [103]. Deuxièmement, il est possible d'entraîner la MT soit par enseignement de stratégies soit par en augmentant directement sa capacité (dans une certaine mesure) [104]. La question la plus importante concerne non seulement l'amélioration de sa capacité mais surtout celle des performances auxquelles cette capacité se trouve associée. Les données disponibles attestent que les entraînements s'adaptant au niveau des participants induisent une progression de capacité, y compris chez des individus dont les capacités de MT sont les plus faibles comme chez ceux qui présentent des troubles (de l'attention : ADHD par exemple) [105] mais avec d'importantes différences interindividuelles. Ces techniques

100. Seyler, D.J., Kirk, E.P. et Ashcraft, M. H. (2003). Elementary subtraction. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 29, 1339-1352.

101. Van der Weijer-Bergsma, E., Kroesbergen, E.H., & Van Luit, J.E.H. (2014). Verbal and visuo-spatial working memory and mathematical ability in different domains throughout primary school. *Memory and Cognition*

102. Holmes, J., Gathercole, S.E., & Dunning, D.L. (2010). Poor working-memory : Impact and interventions. In P. Bauer (Ed.), *Advances in child development and behavior*. Elsevier

103. Noël, M-P., Seron, X. et Trovarelli, F. (2004). Working memory as a predictor of addition skills and addition strategies in children. *Current Psychology of Cognition*, 22, 3-25. Noël, M-P. (2009). Counting on working memory when learning to count and to add : A preschool study. *Developmental Psychology*, 45, 1630-1643. Seyler, D.J., Kirk, E.P. et Ashcraft, M. H. (2003). Elementary subtraction. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition,* 29, 1339-1352. Caviola, S., Mammarella, I.C., Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (2014). Working memory and domain-specific precursors predicting success in learning written subtraction problems. *Learning and Individual Differences*, 36, 92-100.

104. StClair-Thompson, H., Stevens, R., Hunt, A., & Bolder, E. (2010). Improving children's working memory and classroom performance. *Educational Psychology*, 30 (2), 203-219. Jaeggi, S.M., Buschkuehl, M., Jonides, J., & Shah, P. (2011). Short- and long-term benefits of cognitive training. *PNAS*, 108, 10081-10086.

105. Klingberg, T., Forssberg, H., & Westerberg, H. (2002). Training of working memory in children with ADHD. *Journal of Clinical and Experimental Neuropsychology*, 24 (6), 781-791. Klingberg, T., Fernell, E., Olesen, P.J. et al. (2005). Computerized training of working memory in children with ADHD. A randomized controlled trial. Journal of the American Child and Adolescent Psychiatry, 44 (2), 177-186. Diamond, A., & Lee, K. (2011). Interventions shown to aid executive function development in

d'entraînement sont transposables en milieu scolaire sans perte de gain. Elles montrent moins clairement une généralisation des améliorations à des domaines censés mobiliser la MT, par exemple les mathématiques ou la compréhension de textes [106] .

La question de l'anxiété.

Plusieurs recherches récentes ont montré que l'anxiété interfère avec la résolution des opérations et problèmes, et même avec des épreuves de comparaisons de quantités [107] . Par exemple, des participants adultes faiblement ou fortement anxieux ont eu à résoudre des opérations simples ($4 + 3$) ou complexes ($23 + 11$) comportant pour certaines des retenues tout en devant maintenir en mémoire des séries de 2 à 6 lettres. Les plus anxieux présentent une chute plus importante des performances dans la condition de plus grande charge (6 lettres) que les moins anxieux. Aux opérations avec retenues, les très anxieux commettent 40% d'erreurs contre 20% seulement pour les faiblement anxieux alors que tous ne totalisent que 10% d'erreurs sous la condition de faible charge (2 lettres). De plus, les participants ayant la MT la plus élevée présentent la chute la plus importante. L'anxiété agit ainsi comme une tâche secondaire en MT. Notamment elle allonge les durées de réaction et de résolution et diminue les performances.

En résumé, la MT et ses trois composantes (MTV, MTVS et SE) apparaissent impliquées dans toutes les dimensions des mathématiques et sont à l'origine d'importantes différences interindividuelles. Cette implication est précoce et agit vraisemblablement en cascade : les difficultés rencontrées par exemple dans les activités de dénombrement à 5-6 ans pourraient gêner l'apprentissage et la mémorisation des faits arithmétiques ($3 + 4 \rightarrow 7$) ou l'acquisition de stratégies qui, à leur tour rendraient plus ardue la résolution des opérations posées, etc. Une dimension cognitive générale est donc susceptible de contraindre (ou faciliter) la gestion et l'apprentissage de procédures, faits voire concepts (commutativité) mathématiques. Les données issues de l'imagerie cérébrale tendent à confirmer que l'évolution des performances est associée à une bascule des traitements allant des aires préfrontales (gérant les fonctions exécutives et la MT) aux aires pariétales supposées dédiées aux traitements mathématiques [108]. De là l'importance de rechercher des modalités d'interventions visant à prévenir ou moduler la charge en MT, par exemple en décomposant les apprentissages en sous-buts ou en effectuant un guidage des enfants confrontés à certaines activités. Des approches plus ambitieuses mais plus délicates à mettre en œuvre dans les classes sont à l'étude (enseigne-

children 4 to 12 years old. *Science*, 333, 959-964. Diamond, A. & Amso, D. (2008). Contributions of neuroscience to our understanding of cognitive development. *Current Directions in Psychological Science*, 17 (2), 136-140

106. Holmes, J., Gathercole, S.E., & Dunning, D.L. (2009). Adaptive training leads to sustained enhancement of poor working memory children. *Developmental Science*, 12 (4), 9-15. Holmes, J., & Gathercole, S.E. (2014). Taking working memory training from the laboratory into schools. *Educational Psychology*, 34 (4), 440-450.

107. Ashcraft MH, & Kirk EP. (2001). The relationships among working memory, math anxiety, and performance. *Journal of Experimental Psychology : General*, 130 :224. M. H. Ashcraft, J. A. Krause, & D. R. Hopko (2007). Is Math Anxiety a Mathematical Learning Disability ? In D. B. Berch, M. M. M. Mazzocco (eds.), *Why is math so hard for some children ?* Baltimore : Paul Brookes. Maloney, E.A., Sattizahn, R., & Beilock, S.L. (2014). Anxiety and cognition. *WIREs Cognitive Science*, 5, 403-413.

108. Rivera, S.M., Reiss, A.L., Eckert, M.A., & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic : Evidence for increased functional specialization in the left inferior cortex. *Cerebral Cortex*, 15, 1779-1790. Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing : An event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 18 (11), 1820-1828. Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews Neuroscience*, 9, 278-291. Menon, V. (2010). *Developmental cognitive neuroscience of arithmetic : Implications for learning and education*. ZDM, 42, 515-525. Pour une présentation générale voir : Zago, L., & Pesenti, M. (2004). Bases neurales des activités numériques. In M. Pesenti & X. Seron (Eds.), *La cognition numérique*. Paris : Hermès Lavoisier.

ment de stratégies ; amélioration de la capacité de MT). Les résultats disponibles sont encourageants mais soulèvent la question de la généralisation des gains aux performances académiques [109]. Aucun des grands modèles de la cognition numérique ou de son développement n'intègre la MT comme composante, ce qui devra être fait.

Annexe B Les faits numériques (ou arithmétiques)

Les faits arithmétiques renvoient aux opérations (additions, soustractions, multiplications) dont le résultat ne requiert pas le recours à des calculs : l'accès aux résultats est vécu intuitivement comme s'effectuant par remémoration directe. Trois points méritent d'être notés. Premièrement, les données issues de la neuropsychologie mettent en évidence l'existence de deux modalités de traitement des opérations simples : le recours à des "règles" (le terme procédures serait sans doute mieux adapté) (par exemple pour traiter $m + 0$ ou encore $m \times 0$ ou $m \times 1$) et la récupération de faits ($3 \times 2 \rightarrow 6$) en mémoire [110]. Les patients aphasiques commettent plus d'erreurs dans les faits arithmétiques que les sujets contrôles et les taux d'erreurs sont corrélés à la sévérité du déficit langagier. Chez tous les patients, les tables de multiplication sont particulièrement échouées. Ces données s'accordent avec la conception selon laquelle les tables de multiplication seraient traitées verbalement. Elles font également apparaître que la dimension conceptuelle des opérations peut se voir dissociée de leurs dimensions procédurale ou factuelle : certains patients ne peuvent se remémorer les faits arithmétiques alors même qu'ils sont en mesure d'expliquer ce qu'est une multiplication et comment procéder pour la traiter, et réciproquement. Deuxièmement, la faible fiabilité des intuitions et des protocoles verbaux a conduit à développer des techniques expérimentales mettant en évidence l'activation automatique (inconsciente, involontaire et irrépressible) de résultats suivant la présentation de paires d'opérandes [111] : ainsi, 2 2 active 4, même en l'absence du signe $+$ ou $\times$. Les résultats correspondants permettent de distinguer les processus automatiques de ceux qui sont jugés tels par les participants mais qui font vraisemblablement appel à d'autres modalités de traitement [112]. Troisièmement, les difficultés de mémorisation ou de récupération des tables d'addition et de multiplication caractérisent la plupart des enfants présentant des troubles en mathématiques [113] . Il n'existe toutefois pas de consensus pour décider quels sont les problèmes susceptibles d'être considérés comme des faits arithmétiques qui sont directement récupérés en mémoire et ne nécessitent pas de calcul. Il est sans doute nécessaire de tenir compte de différences interindividuelles considérables.

L'existence de faits arithmétiques est attestée pour les additions et les multiplications, moins sûrement pour les soustractions, et surtout les divisions. Toutefois, les additions ont un caractère initialement procédural (elles sont d'abord résolues par comptage) qui les rend moins fragiles que les multiplications : le

109. Holmes, J., Gathercole, S.E., & Dunning, D.L. (2010). Poor working-memory : Impact and interventions. In P. Bauer (Ed.), *Advances in child development and behavior*. Elsevier.

110. Delazer, M. et Benke, T. (1997). Arithmetic facts without meaning. *Cortex*, 33, 697-610.

111. Lemaire, P., Fayol, M., & Abdi, H. (1991). Associative confusion effect in cognitive arithmetic : Evidence for partially autonomous processes. *CPC : European Bulletin of Cognitive Psychology*, 5, 587-604. Lemaire, P., Barrett, S.H., Fayol, M. & Abdi, H. (1994). Automatic activation of addition and multiplication facts in elementary school children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 57, 234-258.

112. Thevenot, C., Castel, C., Fanget, M., & Fayol, M. (2010). Mental subtraction in high and lower-skilled arithmetic problem solvers : verbal report vs. operand-recognition paradigms. *Journal of Experimental Psychology : Learning, Memory, and Cognition*, 36, 1242-1255.

113. Geary, D.C. (1994). *Children's mathematical development*. Washington, D.C. : American Psychological Association. Noël, M-P. (Ed.) (2005). *La dyscalculie, trouble du développement numérique de l'enfant*. Marseille : SOLAL.

recours à une procédure de comptage reste toujours possible. La question se pose de déterminer comment les enfants passent d'un traitement initialement procédural à la récupération en mémoire, et de comprendre pourquoi certains individus ne parviennent pas à apprendre les tables d'addition ou de multiplication. Les faibles performances aux additions simples ou aux multiplications peuvent a priori tenir à deux raisons. Soit les associations entre paires d'opérandes et résultats n'ont pas été stockées en mémoire (problème dit d'encodage), ou ont donné lieu à une mémorisation erronée ($7 + 4 = 12$) auquel cas, elles ne peuvent être (correctement) retrouvées en mémoire. Soit l'encodage a bien eu lieu mais les difficultés surviennent lors de la récupération, comme il arrive parfois lorsqu'un mot nous manque ou qu'un autre s'y substitue ("j'ai observé avec attraction"avec attention). Ces difficultés sont imputables à des interférences : Ces deux éventualités ont été examinées et toutes deux fournissent des explications plausibles des difficultés rencontrées par les élèves.

Concernant les difficultés d'encodage, la résolution répétée des mêmes opérations est postulée conduire à la mémorisation d'associations entre opérandes et résultats : par exemple, $4 + 3$, initialement résolue par comptage verbal 4 5, 6 7, l'est ensuite par remémoration de l'association 4 3 $\rightarrow$ 7. Toutefois, la mémorisation nécessite que les trois composantes (les deux opérandes et le résultat) soient présentes simultanément dans la mémoire temporaire (MT) malgré les transformations consécutives au comptage, qui affectent surtout le second opérande. Or, plus la mise en œuvre de la procédure est longue, par exemple parce que le second opérande est grand, plus les calculs sont longs et difficiles. La capacité de mémoire intervient également : plus elle est faible, plus la probabilité de mémorisation de l'association diminue. Deux risques existent. Soit les enfants parviennent à un résultat faux et le mémorisent, soit ils aboutissent au résultat mais ne disposent plus en MT des opérandes et ne peuvent donc mémoriser l'association [114]. Ces situations sont illustrées par les études longitudinales d'enfants de CP, CE_1 ou CE_2 confrontés à des additions et qui parviennent pour certains, mais non tous, à mémoriser les faits numériques [115]. Les effets des variables associées d'une part, aux opérations et d'autre part, aux individus y apparaissent. Les items avec les opérandes les plus grands sont ceux qui demandent le plus de temps et donnent lieu au plus grand nombre d'erreurs. Ce sont eux qui induisent le plus les stratégies élémentaires (usage des doigts, comptage du tout, etc.) : l'utilisation des doigts est corrélée avec les longues durées et les erreurs fréquentes. Relativement aux différences interindividuelles, la prédiction des performances aux additions à partir des performances de MT et de vitesse met en évidence que le meilleur prédicteur de l'exactitude des additions est la répétition de non mots, un indicateur de la capacité de la MT. Ceux qui échouent ou progressent peu rencontrent des problèmes de comptage, continuent à utiliser leurs doigts, mais ne présentent pas de problèmes de langage ni de difficultés en lecture ou en résolution de problèmes.

Relativement aux difficultés de récupération, plusieurs résultats montrent que des élèves ayant de faibles performances en résolution d'additions ou de multiplications élémentaires disposent de connaissances des faits arithmétiques mais commettent des erreurs en raison d'interférences entre résultats activés par les

114. Thevenot, C., Barrouillet, P. & Fayol, M. (2001). Algorithmic solution of arithmetic problems and operands-answer associations in long term memory. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 54A, 599-611. Fanget, M., Thevenot, M., Castel, C., & Fayol, M. (2011). Retrieval from memory or use of procedures for addition in children : Application of the operand-recognition paradigm. *Swiss Journal of Psychology*, 70 (1), 3539.

115. Noël, M-P., Seron, X. et Trovarelli, F. (2004). Working memory as a predictor of addition skills and addition strategies in children. *Current Psychology of Cognition*, 22, 3-25. Jordan, N.C., Hanich, L.B., & Kaplan, D. (2003). Arithmetic fact mastery in young children : A longitudinal investigation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 85, 103-119.

opérandes. Par exemple*Barrouillet, P. & Fayol, M. & Lathulière (1997). Selecting between competitors in multiplication tasks : An explanation of the errors produced by adolescents with learning difficulties.* International Journal of Behavioral Development, *21, 253-275.* , des élèves présentant des difficultés en mathématiques devaient fournir les réponses à des problèmes multiplicatifs a $\times$b (a et b variant de 2 à 9). L'ordre de difficulté des problèmes était le même pour les MD que pour des enfants normaux de même âge réel, des enfants normaux d'âge mental comparable ou des adultes cultivés. De plus, dans toutes ces populations, les réponses erronées appartenaient le plus souvent à la table de l'un des deux opérandes. Ce résultat suggère que les difficultés ne tiennent pas seulement à des problèmes de mémorisation. Dans un deuxième temps, ces élèves ont été soumis à une tâche de réponse à choix multiple où la bonne réponse était présentée associée à trois distracteurs (non interférent NI n'appartenant pas aux tables ; interférent faible I appartenant aux tables mais pas à celles des deux opérandes ; interférent fort IF appartenant aux tables des deux opérandes) a été proposée pour les 33 problèmes multiplicatifs repérés comme les plus difficiles. La condition IF entraînait plus d'erreurs que les deux autres conditions qui ne différaient pas entre elles. Ainsi, la principale difficulté rencontrée par les ńélèves faibles en mathématiques tenait à la sélection de la réponse correcte parmi des compétiteurs appartenant aux tables de l'un ou l'autre des deux opérandes : par exemple, 24 était sélectionné au lieu de 28 pour l'opération 7 x 4. Des travaux plus récents ont confirmé que les interférences affectent la gestion des réponses aux multiplications chez les adultes comme chez les enfants. De plus, les individus les plus sensibles aux interférences le sont aussi lorsque les items ne relèvent pas des mathématiques, mais par exemple des mots. Ainsi, cette sensibilité aux interférences relève des capacités générales mobilisées par les mathématiques, mais non de propriétés spécifiques à ces dernières*De Visscher, A., & Noël, M-P. (2013). A case study of arithmetic facts dyscalculia caused by a hypersensitivity-to-interference in memory.* Cortex, *49, 50-70. De Visscher, A., & Noël, M-P. (2014 in press). Arithmetic facts storage deficit : The hypersensitivity to interference in memory hypothesis.* Developmental Science, .

Une autre question porte sur l'existence éventuelle d'un réseau unique de faits arithmétiques stockés en mémoire et regroupant additions et multiplications et indépendant des modalités de présentation (opérations présentées verbalement /[trwa]/, par écrit trois ou en chiffres arabes 3). La réponse à cette dernière question est en faveur d'un réseau unique et indépendant des modalités. Deux arguments militent en faveur de cette conception. D'une part, les résultats des petites multiplications (3×2) interfèrent avec ceux des petites additions ($3 + 2$), et réciproquement, y compris chez les adultes dont les réponses se trouvent ralenties par ces interférences [116]. D'autre part, au cours de la scolarité, l'apprentissage des tables de multiplication induit à une certaine phase une chute de performance dans la résolution des additions [117] . Le problème est donc de comprendre quand et comment se met en place ce réseau, en fonction de quelles contraintes relevant des dimensions conceptuelles associées aux mathématiques, mais aussi de dimensions plus générales relatives à la cognition.

116. Campbell, J.I.D., Dufour, K.D., & Chen, Y. (2014 sous presse). Retrieval induced forgetting of multiplication facts and identity rule. *Memory and Cognition*,

117. Miller, K.F., & Paredes, D.R. (1990). Starting to add worse : Effects of learning to multiply on children's addition. *Cognition*, 37, 213-242.

En résumé

, les connaissances factuelles (faits numériques ou arithmétiques) jouent un rôle important dans la mesure où elles favorisent un traitement automatique et exact des opérations élémentaires : elles soulagent la MT. Toutefois, leur encodage en mémoire pose problème à certains élèves en raison de la mise en œuvre des procédures ou de la faible capacité de la MT. Chez d'autres, ce sont les interférences lors de la récupération qui constituent un obstacle. Dans les deux cas, les difficultés ne relèvent pas de spécificités mathématiques : ces dernières sont la conséquence de contraintes liées au fonctionnement du système cognitif : capacité de la MT d'une part, sensibilité aux interférences, d'autre part. Toutefois, la faiblesse ou l'absence de faits numériques accessibles influe en cascade sur les apprentissages et performances ultérieurs. À ce jour, les moyens d'intervention permettant de prévenir ces difficultés ou d'y remédier à font défaut.

Annexe C La ligne numérique mentale

A La ligne numérique et le modèle du triple code

L'idée selon laquelle les quantités et les grandeurs (ou encore les magnitudes) peuvent être représentées selon une ligne mentale orientée de gauche à droite n'est pas récente [118]. Toutefois, son exploitation systématique récente repose sur la théorie anatomo-fonctionnelle du triple code, élaborée par Stanislas Dehaene et Laurent Cohen [119]. Cette théorie postule que les grandeurs et quantités s'organisent cognitivement en trois représentations mentales directement reliées les unes aux autres : une représentation verbale correspondant aux noms de nombres et à leurs combinaisons ; une représentation indo-arabe utilisant les chiffres et les suites de chiffres ; une représentation analogique qui fournirait la signification sémantique des numéraux et permettrait d'effectuer des évaluations et comparaisons approximatives. Ces trois modalités de représentation sont associées à la fois à des ensembles de tâches (par exemple le traitement des opérations à plusieurs chiffres pour la représentation indo-arabe) et à des distributions d'activations cérébrales localisées de manière différenciée. Ainsi, la représentation analogique serait traitée dans les hémisphères gauche et droit, dans les cortex pariétaux (notamment dans les sillons intra-pariétaux). Les activations correspondant aux grandeurs (continues) et quantités (discrètes) se situeraient à une position sur la ligne, indépendamment des codes (verbal, indo-arabe) ou des modalités (visuelle, auditive..) d'entrée. La magnitude peut ainsi être figurée de manière métaphorique comme une longueur ou une position sur une droite orientée de gauche (petites grandeurs ou quantités) à droite (grandes magnitudes) [120]. Toutefois, comme le soulignent Wim Fias et Mauro Pesenti, "il n'est toujours pas établi si la ligne numérique orientée est une représentation en mémoire à long terme, stable et indépendante de la tâche, ou si elle constitue une représentation en mémoire à court terme issue d'une stratégie de résolution spécifique aux tâches adoptée

118. Voir pour une revue Chillier, L. (2002). La ligne numérique et els codages du nombre chez l'enfant. In J. Bideaud & H. Lehalle (Eds.), *Le développement des activités numériques chez l'enfant*. Paris : Hermès Lavoisier.

119. Dehaene, S., et Cohen, L. (2000). Un modèle anatomique et fonctionnel de l'arithmétique mentale. In M. Pesenti et X. Seron (Eds.), *Neuropsychologie des troubles du calcul et du traitement des nombres*. Marseille : SOLAL. Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. et Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20, 487-506. Dehaene, S. (2009). Origins of mathematical intuitions. *The Year in Cognitive Neuroscience. Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 232-259. Fias, W., & Pesenti, M. (2004). Le modèle du triple code de Dehaene. In M. Pesenti & X. Seron (Eds.), *La cognition numérique*. Paris : Hermès Lavoisier.

120. Ce qui renvoie à l'effet SNARC : Dehaene, S., Bossini, S., & Giraux, P. (1993). The mental representation of parity and number magnitude. *Journal of Experimental Psychology : General*, 122, 371-396

par les sujets placés dans un environnement expérimental donné" (p. 75).

B La ligne numérique comme instrument d'évaluation des représentations

De nombreux auteurs et recherches utilisent la ligne numérique comme une tâche dans laquelle les participants doivent placer sur une droite ou un segment borné par des indications en code arabe (0-10 versus 0-100, versus 0-1000, etc.), plus rarement en code verbal, voire sous format analogique (des collections de jetons) des grandeurs ou quantités. Par exemple, les participants ont à positionner sur un segment allant de 0 à 100 une vingtaine de nombres : 17, 49, 82, etc. Les performances sont évaluées en mesurant la distance entre les positions fournies et celles qui correspondraient à l'utilisation idéale d'estimations linéaires, aboutissant à un indice, le PAE (Percentage of Absolute Errors). Cette procédure met en évidence des différences interindividuelles, des différences associées au développement (et à la scolarisation) mais aussi aux troubles. La plupart des auteurs postule implicitement que les performances reflètent l'organisation mentale des nombres.

Plus concrètement, l'épreuve de la ligne numérique teste la capacité des individus à mobiliser une échelle linéaire dont les valeurs sont équidistantes (la distance entre 4 et 5 est la même qu'entre 14 et 15 ou entre 64 et 65). Différents groupes d'âges ont été testés avec des lignes dotées de deux extrémités : 0 et soit 10, soit 100 soit 1000. Les participants devaient placer sur ces lignes des quantités, par exemple 2, 5, 7 sur une ligne de 0 à 10. Le placement sur une ligne numérique [121] fournirait une information directe sur les représentations mentales des quantités. La correspondance exacte devrait être linéaire. Sinon, les quantités ne seraient pas mentalement organisées ainsi, certaines seraient par exemple surestimées. L'estimation s'améliore en fonction de l'âge ou du niveau scolaire. Sur une ligne allant de 0 à 10, le pourcentage d'erreurs passe de 14% en fin de CP à 4% en CE_2. De 0 à 100, il varie de 19% en fin de CP à 8% en fin de CE_2. De 0 à 1000, il évolue de 21% en CE_1 à 14% en CM_1 puis 7% en classe de sixième pour atteindre 1% chez les adultes. Un autre type d'analyse fait apparaître que les enfants les plus jeunes tendent à surévaluer les petites quantités et à sous-évaluer les plus grandes, ce qui donne aux courbes de performance une allure de type logarithmique. Au contraire, chez les plus grands, la forme est linéaire (les estimations correspondent aux valeurs idéales (Figure ci-dessous).

Les courbes des performances des enfants passent progressivement d'une forme logarithmique à une forme linéaire. Les résultats initialement obtenus dans des tâches portant sur la détermination de positions sur une ligne numérique ont été étendus à des activités différentes : les patrons de performance ont les mêmes allures mais l'évolution est plus rapide avec les grandeurs (par exemple tracer une ligne correspondant à la quantité de liquide contenue dans un récipient) qu'avec les quantités discrètes, symboliques ou non. Ces données reposent le problème d'une représentation unique des grandeurs et quantités et étayent ainsi les résultats des études d'imagerie cérébrale [122] . Elles amènent aussi à s'interroger sur le fait que

121. Siegler, R.S., & Opfer, J.E. (2003). The development of numerical estimation : Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, 14 (3), 237-243.Booth, J.L., & Siegler, R.S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41, 189-201. Siegler, R.S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, 75, 428-444. Siegler, R., & Booth, J.L. (2005). Development of numerical estimation. A review. In J.I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition*. New York : Psychology Press.

122. Sella, F., Berteletti, I., Lucangelli, D., & Zorzi, M. (2015). Varieties of quantity estimation in children. *Developmental Psychology*, 51 (6), 758-770. Castelli, F., Glaser, D.E., & Butterworth, B. (2006). Discrete and analogue quantity processing in

Figure A.1 – Illustration des formes des courbes et de leur évolution de la GSM au CE1 (Siegler et Booth, 2004)

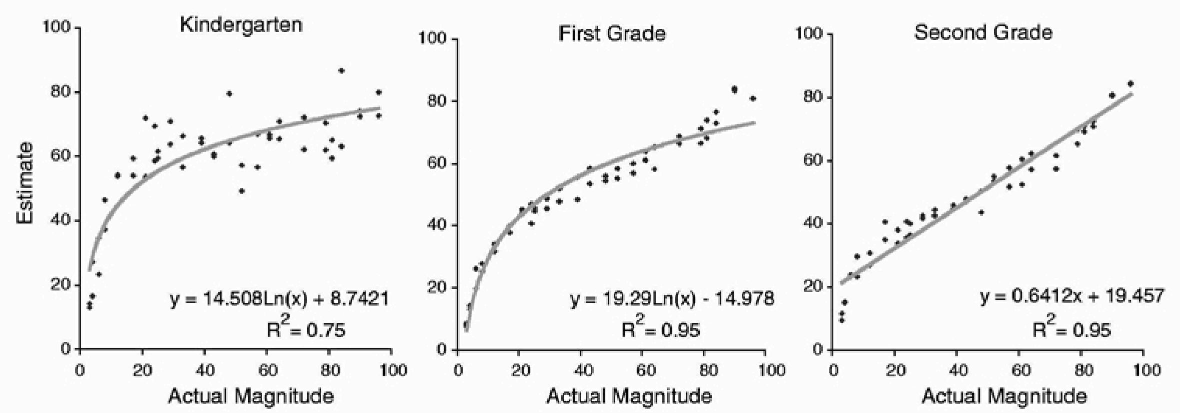


Figure 2. Progression from logarithmic pattern of median estimates among kindergartners (left panel) to linear pattern of estimates among second graders (right panel) in Experiment.

les performances relevées reflètent des représentations mentales [123] , ce qui correspond à la conception dominante, ou des stratégies de gestion des situations présentées aux enfants. En effet, au fur et à mesure qu'évoluent les connaissances des enfants, ceux-ci mobilisent de nouveaux repères (par exemple la moitié de la droite, ou le quart) qui permettent d'aboutir à des performances de plus en plus précises.

C De la ligne numérique aux performances en mathématiques

L'intérêt porté aux performances relevées à la ligne numérique tient à ce que les chercheurs ont mis en évidence que les valeurs du PAE et le caractère linéaire ou logarithmique sont corrélés aux performances en mathématiques à la fois au moment de l'épreuve de la ligne mais aussi aux performances mathématiques ultérieures [124] . En somme, il s'agirait d'un indice d'organisation des connaissances (et des stratégies ?) en mémoire concernant les nombres. David Geary rapporte que les élèves aux performances normales ont des tracés sur la ligne qui aboutissent à une représentation linéaire ; par contraste, les faibles et ceux qui échouent en mathématiques fournissent des représentations privilégiant fortement les petites quantités (voir

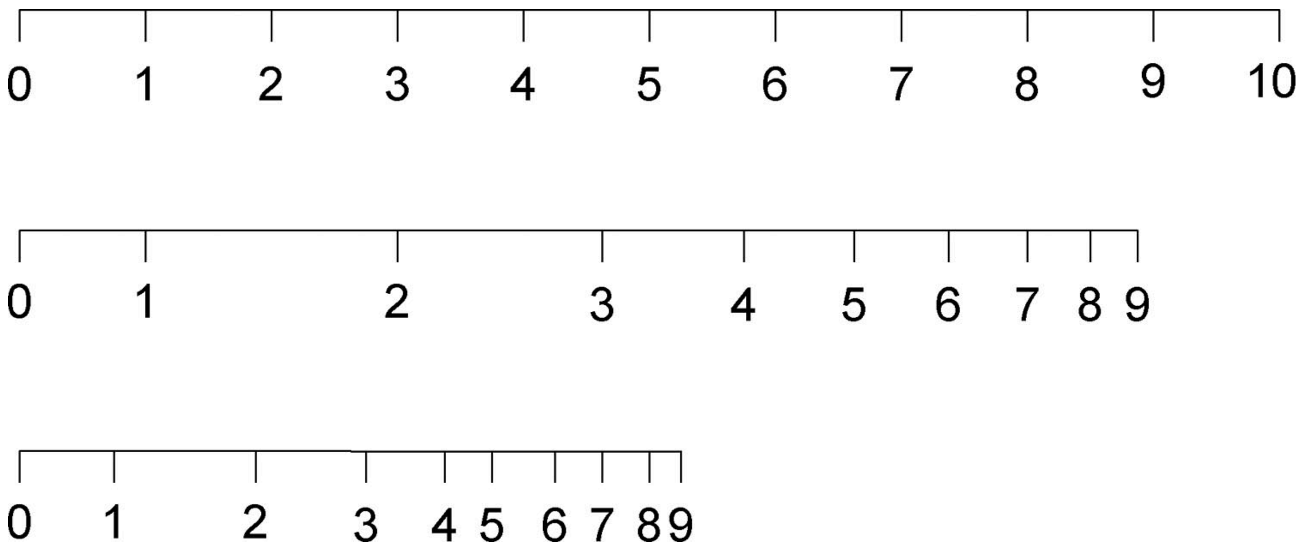
the parietal lobe : A functional MRI study. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103 (12), 4693-4698. Cohen Kadosh, R., Lammertyn, J., & Izard, V. (2008). Are numbers special ? An overview of chronometric neuroimaging, developmental and comparative studies of magnitude representation. *Progress in Neurobiology*, 84, 132-147.

123. Nous ne discutons pas ici les modèles de la ligne numérique ; voir Verguts, T., & Fias, W. (2004). Modèles de la ligne numérique. In M. Pesenti & X. Seron (Eds.), *La cognition numérique*. Paris : Hermès Lavoisier. Concernant les stratégies, voir : Friso-van den Bos, I., Kroesbergen, E.H., Van Luit, J.E.H., Xenidou-Dervou, I., Jonkman, L.M., Van der Schoot, M., Van Lieshout, E.C.D.M. (2015). Longitudinal development of number line estimation and mathematics performance in primary school children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 134, 12-29.

124. Booth, J.L. & Siegler, R.S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, 79, 1016-1031. Friso-van den Bos et al. ibid. Sasanguie, D., De Smedt, B., Defever , E., & Reynvoet, B. (2012). Association between basic numerical abilities and mathematics achievement. *British Journal of Developmental Psychology*, 30, 344-357.

Figure ci-dessous) [125].

Figure A.2 – Performances des enfants tout-venant (haut), des faibles en mathématiques (milieu) et des enfants présentant des troubles en mathématiques (bas) (Geary, 2011)



Des données récentes montrent que la réciproque est également vraie : les progrès en mathématiques rejaillissent sur l'allure des courbes. De fait, les valeurs du PAE diminuent en fonction de l'instruction reçue en mathématiques de base : par exemple, les Munduruku ont des scores qui se situent sur une courbe d'allure logarithmique alors que ceux qui ont reçu une éducation même sommaire obtiennent des performances qui suivent une courbe de forme linéaire. Ce qui écarte une interprétation de l'évolution en termes de maturation [126].

L'accès aux représentations linéaires semble jouer un rôle dans le développement de la connaissance numérique. Il s'accompagne de changements parallèles dans l'estimation de la quantité, des mesures et dans la vitesse des comparaisons. Si la relation est de type causal, améliorer le passage à la représentation linéaire devrait se traduire par des améliorations de performances en mathématiques. Des chercheurs ont développé un jeu de plateau (de type "petits chevaux") dont l'organisation spatiale est linéaire et non circulaire ou hélicoïdale. Un groupe d'enfants issus de milieux défavorisés (ces enfants ont une représentation sur une ligne allant de 0 à 10 moins fréquemment linéaire que les enfants de milieux sociaux plus élevés) ayant joué avec ce dispositif a évolué vers la représentation linéaire [127] et a progressé dans des performances mathématiques comme les comparaisons de quantités, l'identification des chiffres et la résolution d'opérations.

125. Geary, D.C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. *Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics*, 32 (3), 250-263.

126. Dehaene, S., Izard, V., Spelke, E., & Pica, P. (2008). Log or linear ? Distinct intuitions of the number scale in Western and Amazonian indigene cultures. *Science*, 320, nř5880, 1217-1220.

127. Ramani, G.B., & Siegler, R.S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low- and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developental Psychology*, 32, 146-159. Siegler, R.S. & Ramani, G.B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income childrens numerical development. *Developmental Science*, 11(5), 655-661. Siegler, R.S. & Ramani, G.B. (2009). Playing linear number board games – but not circular ones – improves low-income preschoolersnumerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, 101 (3), 545-560.

D Conclusion

En résumé, les travaux portant sur la ligne numérique et qui consistent à demander à des individus, enfants ou adultes, de placer sur un segment borné (les bornes varient de 0-10 à 0-10 000 voire plus) des grandeurs ou des quantités symboliques (1, 25, etc.) ou non (collections de jetons) présentent une double orientation : soit théorique en vue d'évaluer dans quelle mesure les représentations mentales se conforment à une forme linéaire aux caractéristiques variables selon les thèses défendues [128] ; soit pragmatique afin de définir un indice du niveau de développement des compétences numériques définies en termes de représentations ou de stratégies. C'est ce second objectif qui nous intéresse ici. Les données disponibles montrent l'existence d'une association entre performances mathématiques et scores (PAE) à la ligne numérique. De plus, le score à la ligne numérique, d'une part prédit (dans une certaine mesure) les performances mathématiques ultérieures et, d'autre part, évolue avec celles-ci. Les entraînements mis en place visant à améliorer les scores à la ligne numérique se traduisent par des progrès (diminution du PAE et linéarisation de la courbe) mais aussi par une amélioration des performances à certaines épreuves mathématiques. De là les tentatives pour élaborer des activités ludiques (par exemple des jeux de plateau) ayant pour objectif d'induire des progrès en mathématiques [129].

128. Verguts, T., & Fias, W. (2004). Modèles de la ligne numérique. In M. Pesenti & X. Seron (Eds.), *La cognition numérique*. Paris : Hermès Lavoisier.

129. Laski, E.V., & Siegler, R.S. (2014). Learning from number board games : You learn what you encode. *Developmental Psychology*, 50 (3), 853-864.

cnesco
conseil national
d'évaluation
du système scolaire

ifé
INSTITUT
FRANÇAIS
DE L'ÉDUCATION

Cnesco

Carré Suffren

31-35 rue de la Fédération

75 015 Paris

cnesco.communication@education.gouv.fr

École normale supérieure de Lyon
Institut français de l'Éducation

19 allée de Fontenay
69 007 Lyon

conf.consensus.ife@ens-lyon.fr