NUMÉRIQUE
ET APPRENTISSAGES SCOLAIRES

La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques

Sophie SOURY-LAVERGNE

Institut français de l'éducation ENS Lyon

Université Grenoble Alpes

Octobre 2020

le cnam
Cnesco

Centre national d'étude des systèmes scolaires

Pour citer ce rapport, merci d'utiliser la référence suivante :

Soury-Lavergne, S. (2020). *La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques*. Paris : Cnesco-Cnam.

Ce rapport s'inscrit dans une série de contributions publiées par le Centre national d'étude des systèmes scolaires (Cnesco) sur la thématique : **Numérique et apprentissages scolaires.**

Les opinions et arguments exprimés n'engagent que l'auteure du rapport.

Disponible sur le site du Cnesco : http ://www.cnesco.fr
Publié en octobre 2020
Centre national d'étude des systèmes scolaires
41 rue Gay-Lussac 75005 Paris

Table des matières

Liste des figures

Résumé

Ce rapport dresse un état des lieux des travaux et des recherches menées sur la géométrie dynamique, une technologie conçue pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. L'usage qui s'est massivement développé dans le milieu scolaire, en France comme dans le monde entier, s'avère en partie en décalage avec ce que les recherches révèlent comme le plus pertinent. Les enseignants de mathématiques connaissent bien la géométrie dynamique et l'utilisent en classe, collectivement mais aussi, pour nombre d'entre eux, la font utiliser directement par leurs élèves. Cependant, si les enseignants font référence à une pratique plus expérimentale des mathématiques avec la géométrie dynamique, ils ne semblent pas tous mobiliser la fonctionnalité de déplacement qui est pourtant considérée par la recherche comme étant incontournable dans son usage et comme justifiant sa valeur ajoutée par rapport à d'autres environnements de travail en mathématiques. Pour comprendre les raisons de ces usages et les faire évoluer, les recherches ont étudié les dispositifs de formation, qui touchent un peu plus de la moitié des enseignants de collège et lycée d'après une étude inédite réalisée en 2019 pour ce rapport, ainsi que les autres situations de développement professionnel, notamment les collectifs d'enseignants et de chercheurs qui se constituent autour de la conception de ressources et de leur usage. Elles ont identifié le rôle clef de ces ressources, que les enseignants conçoivent, adaptent et cumulent tout au long de leur carrière, dans l'évolution des pratiques. Ces recherches ont aussi étudié la relation entre apprentissages mathématiques et prise en main de la géométrie dynamique, à travers la notion de genèse instrumentale*1, pour identifier les caractéristiques des situations didactiques les plus favorables : faire apparaître la connaissance mathématique visée comme un outil de résolution de problème et pas seulement comme un invariant à constater, avoir recours à la fonctionnalité de déplacement pour valider une solution mais aussi comme moyen de rechercher cette solution, enfin articuler l'usage de la géométrie dynamique avec la mobilisation d'autres environnements impliquant notamment la manipulation d'objets et d'outils tangibles. À propos de la technologie elle-même et des différents logiciels disponibles, les recherches ont pointé la nécessaire qualité des technologies numériques quand il s'agit d'apprentissage, en particulier la cohérence entre le fonctionnement de la technologie et les connaissances mathématiques visées.

Ce rapport présente les caractéristiques de la technologie de géométrie dynamique et ses développements les plus récents en partie I, son intérêt pour l'apprentissage des mathématiques au primaire et au secondaire en partie II et, en partie III, les pratiques actuelles des enseignants en regard des problématiques de formation et de développement professionnel.

[1] Les expressions suivies d'un astérisque sont définies dans l'encadré « Les humains et les outils » pp. 11-12.

Introduction

Près de 30 ans après son invention, bien que les usages soient très répandus, la géométrie dynamique n'a pas conduit à une modification généralisée des situations d'apprentissage des élèves et des pratiques des enseignants en géométrie (Assude, 2007 ; Abboud-Blanchard, 2013). Bien que son usage permette d'apprendre les mathématiques et permette, aux dires des enseignants, des constructions plus rapides, plus précises et en plus grand nombre, la géométrie dynamique n'a modifié de façon fondamentale ni le rapport des élèves aux mathématiques et à la géométrie, ni les pratiques d'enseignement, comme le révèle l'étude inédite présentée en partie III de ce rapport.

Quelles sont les raisons de la stabilité de ces rapports et de ces pratiques ? Ce n'est sans doute pas un problème d'équipement ou de familiarité des utilisateurs avec les technologies en général (Brice, Croutte, Jauneau-Cotte & Lautié, 2015), ni même de présence de la technologie au sein des établissements scolaires (MEN DNE, 2016).

Si les bons résultats obtenus lors des expérimentations au sein de projets se diffusent très difficilement au-delà du cercle d'enseignants directement impliqués, il semble nécessaire d'étudier les choix des enseignants et les raisons de leur apparente résistance. Un volet important de travaux sur les technologies concerne particulièrement les enseignants, leurs connaissances, le contexte institutionnel de leur exercice, leurs pratiques dans et en dehors de la classe, leurs ressources et leur développement professionnel (Hoyles & Lagrange, 2010 ; Gueudet, Pepin & Trouche, 2012 ; Abboud & Rogalski, 2017). Ces travaux ont permis d'identifier la complexité de la situation des enseignants. Il ne suffit pas de leur donner accès à une technologie, il faut aussi qu'ils sachent l'utiliser pour eux-mêmes et enfin, ce qui n'est pas la même chose, qu'ils sachent l'utiliser pour faire apprendre. En particulier la conception des tâches à proposer aux élèves est à la fois cruciale et loin d'être évidente (Laborde, 2001 ; Sinclair, 2003). Le foisonnement actuel sur internet de ressources relatives à la géométrie dynamique ne facilite pas non plus l'identification par les enseignants des ressources adéquates, c'est-à-dire utilisables effectivement avec l'environnement disponible en classe, acceptables d'un point de vue institutionnel et utiles pour atteindre l'objectif visé. Les enseignants ne semblent pas suffisamment aidés pour identifier les ressources les plus pertinentes et adaptées à leur besoin, malgré les sites et portails institutionnels dédiés (Trgalova *et al.*, 2011). L'évaluation de la qualité des ressources de géométrie dynamique et la façon dont les enseignants pouvaient y avoir accès a été l'enjeu d'un projet européen (Intergeo ; Kortenkamp & Laborde, 2011) qui a montré que l'accès aux ressources n'entraine pas nécessairement leur appropriation par les enseignants et leur intégration dans les pratiques. Un accompagnement par des formations ou par d'autres dispositifs de développement professionnel est également nécessaire. Or, les programmes de formation s'appuyant sur un accompagnement par les pairs et une mutualisation des ressources, comme le programme Pairform@nce, n'ont pas réellement réussi à s'étendre au-delà des utilisateurs initiaux, enseignants, formateurs et concepteurs de formation (Gueudet, Sacristan, Soury-Lavergne & Trouche, 2012 ; Aldon *et al.*, 2013).

Si l'enjeu du recours aux technologies, en particulier à la géométrie dynamique, est de faire évoluer l'enseignement des mathématiques pour au final améliorer la culture mathématique des élèves, il y a là un problème qui résiste à la communauté éducative.

Cette contribution propose de passer en revue les travaux menés depuis une vingtaine d'années (peu de travaux de recherche dédiés à la géométrie dynamique ont été publiés en France au cours des cinq dernières années) permettant d'expliquer la situation actuelle de l'usage de la géométrie dynamique dans les classes. Après une présentation de la technologie de géométrie dynamique (partie I), ce rapport cherche dans les travaux consacrés aux apprentissages et aux élèves (partie II) puis dans les travaux consacrés aux processus d'enseignement et aux enseignants (partie III) les éléments de compréhension et d'explication de l'état des pratiques relatives aux usages de la géométrie dynamique en France aujourd'hui.

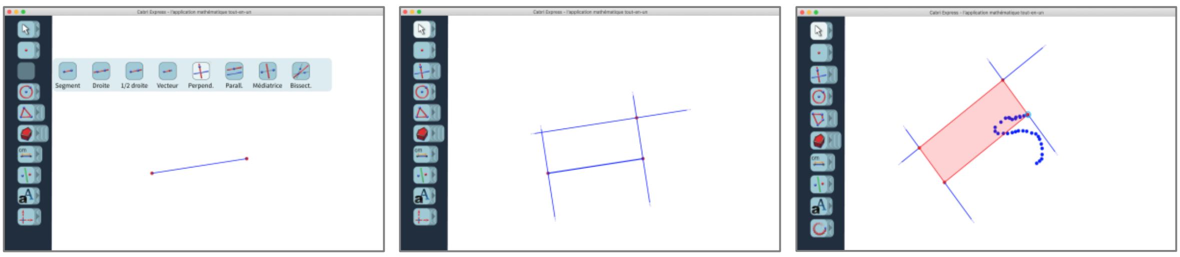
I. Qu'est-ce que la géométrie dynamique ?

Les travaux de recherche sur la géométrie dynamique appartiennent au domaine des EIAH, Environnements informatiques pour l'apprentissage humain, qui considère les technologies numériques et l'informatique non seulement comme un moyen de faire apprendre, mais aussi comme un outil de recherche pour concevoir et étudier les situations d'apprentissage et d'enseignement et en particulier les questions de transposition des savoirs. Comme le dit le titre de l'ouvrage de Noss et Hoyles (1996) « *Windows on mathematical meanings* »[2], la technologie permet d'accéder à ce que signifie faire des mathématiques et apprendre les mathématiques. La géométrie dynamique est un exemple emblématique des EIAH par l'ampleur des recherches qu'elle a suscitées et des usages scolaires qu'elle a provoqués avec des millions d'utilisateurs dans le monde.

A. Un micromonde pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

La géométrie dynamique est un terme générique qui désigne un type de logiciels permettant de construire à l'écran des figures dynamiques qui peuvent se déformer tout en conservant les propriétés géométriques qui ont été utilisées au moment de leur construction. Par exemple (Figure 1), une procédure pour construire un rectangle utilise le fait que ses angles sont droits. L'utilisateur peut l'indiquer explicitement au logiciel de géométrie dynamique en utilisant un outil tel que « droites perpendiculaires ». Il obtiendra alors à l'écran un rectangle qui conservera ses angles droits même quand un point est déplacé : la figure sera alors actualisée automatiquement.

Figure 1. Un rectangle en géométrie dynamique reste un rectangle au cours du déplacement

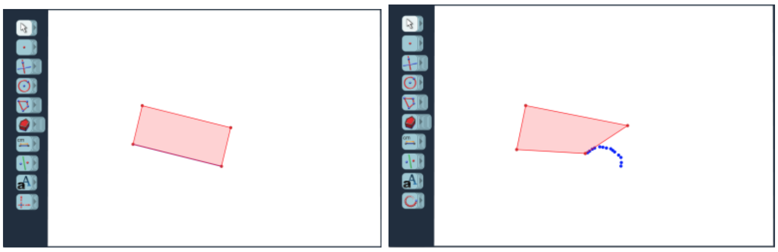


Note : Construction d'un rectangle avec utilisation des droites perpendiculaires (à gauche) dans le logiciel Cabri Express (https://cabricloud.com/home/). La figure obtenue au centre reste un rectangle, même lorsqu'elle s'actualise automatiquement au moment du déplacement d'un de ses sommets. A droite, nouvelle position du rectangle avec trace des positions successives du sommet déplacé.

[2] « Fenêtre sur la pensée mathématique » (notre traduction).

Si l'utilisateur n'a pas explicitement utilisé les propriétés géométriques nécessaires, la figure ne restera pas correcte au cours du déplacement (Figure 2).

Figure 2. Un rectangle qui ne reste pas rectangle lors du déplacement d'un de ses sommets



Note : Le rectangle a été créé à l'œil sans utiliser la propriété de perpendicularité. Lors du déplacement de l'un de ses sommets (trace à droite) la figure n'est plus un rectangle. Le déplacement agit comme révélateur des propriétés géométriques utilisées ou pas lors de la construction.

Il s'agit d'un micromonde, c'est-à-dire d'un environnement informatique permettant à l'utilisateur d'explorer, par la manipulation directe de représentations graphiques à l'écran, un monde d'objets dont le comportement est régi par des lois mathématiques. En tant que micromonde, la géométrie dynamique est un outil d'exploration, ouvert, qui ne propose pas de tâche particulière et ne les évalue pas. Les micromondes sont apparus avec les travaux de Papert sur le logiciel Logo (Papert, 1980 ; Balacheff, 2017). Ils implémentent dans la technologie les principes d'apprentissage hérités du constructivisme. Cette caractérisation du terme micromonde a été actualisée par Healy et Kynigos à partir d'une définition de Samara et Clements pour mettre l'accent sur les significations résultant de l'interaction de l'utilisateur avec l'environnement, donc sur l'apprentissage. Les micromondes sont des : *« Computational environments embedding a coherent set of scientific concepts and relations designed so that with an appropriate set of tasks and pedagogy, students can engage in exploration and construction activity rich in the generation of meaning »*[3] (Healy & Kynigos, 2010, p. 64).

La géométrie dynamique a été rendue très largement disponible au niveau mondial grâce à la conception et la diffusion de logiciels dès la fin des années 1980, avec *Cabri-géomètre* en France (Baulac, Bellemain & Laborde, 1988) et quasi simultanément *The Geometer's Sketchpad* aux États-Unis (Jackiw, 1989) puis, plus tard, grâce à d'autres créations originales, comme *Geoplan* en France (CREEM, 1992) ou *Cinderella* en Allemagne (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999). Elle a été adoptée par des enseignants dans le monde entier, en particulier à la suite de la mise à disposition du gratuiciel *GeoGebra* apparu en 2001. Intégrée en France dans les programmes et les manuels au secondaire dès la fin des années 1990, elle a même été utilisée dans un sujet du concours de recrutement des professeurs des écoles de 2006. Son ancrage institutionnel est donc avéré.

B. Conception des logiciels et usage didactique

Dans une perspective d'apprentissage, les choix de conceptions de logiciels ne sont pas neutres, y compris certains détails qui pourraient apparaître comme mineurs. Une attention doit nécessairement être portée aux choix d'interface et aux métaphores qui donnent à manipuler directement les représentations d'objets mathématiques abstraits (Laborde, 2003). Comme le dit Jackiw, concepteur

[3] « Des environnements informatiques qui embarquent un ensemble cohérent de concepts scientifiques et de relations, conçus de telle façon que, avec un ensemble adapté de tâches et de pédagogie, les étudiants puissent s'engager dans une activité d'exploration et de construction riche pour la génération de significations. » notre traduction.

du *Geometer Sketchpad*, lors de la 17e étude de *l'International Commission on Mathematical Instruction* en 2006 « *Technology Revisited* » :

> *Design detail counts […] To the degree our work in mathematics technology aspires to educational influence at significant scale, […] we have first to admit that design matters – that specific design matters, specifically – and, second, to develop a much richer discourse for design analysis.*[4] Butler, Jackiw, Laborde, Lagrange & Yerushalmy, 2010, p. 432.

Ces choix de conception peuvent être guidés par différents principes, issus des travaux sur les interfaces hommes/machines ou des théories de l'apprentissage lorsqu'il s'agit d'EIAH. Or ces principes ne sont pas toujours compatibles. Pour la géométrie dynamique, il a été montré qu'il n'était pas possible de satisfaire simultanément le principe de continuité nécessaire pour créer une interface intelligible par l'utilisateur (la figure s'actualise en continue à chaque instant lors du déplacement des points) et le principe de réversibilité de l'action nécessaire à l'apprentissage (le retour d'un point en position initiale ramène toute la figure en position initiale) (Kortenkamp, 1999 ; Genevès, 2004 ; Gawlick, 2004). Ces processus de conception interrogent également les définitions des objets mathématiques, amenant à questionner les références elles-mêmes ou à produire des figures dynamiques inacceptables du point de vue mathématique et du point de vue didactique (Soury-Lavergne & Maschietto, 2019). Ainsi, le choix des logiciels n'est pas neutre quand il s'agit de les utiliser pour faire apprendre.

C. Évolutions récentes des environnements de géométrie dynamique

L'évolution des logiciels de géométrie dynamique a d'abord concerné leur insertion dans un ensemble de ressources, au sein d'environnements offrant à l'utilisateur des fonctionnalités mathématiques élargies. La géométrie dynamique apparaît alors comme un module, utilisable avec d'autres modules de mathématiques, dans des environnements comme XCAS (Université Joseph Fourier[5]) ou la suite TI-Nspire de Texas Instruments. La géométrie dynamique est également incluse directement au sein d'énoncés d'activités et de problèmes mathématiques, mis en forme dans des *e-books* (projet européen *M C Square* (Kynigos, 2015)), des manuels numériques ou des cahiers d'activité informatisés (collection « 1 2 3… Cabri, je fais des maths », 2010). La question de la conception des tâches accompagnant la mise à disposition d'un environnement de géométrie dynamique apparaît maintenant comme un enjeu crucial (Margolinas, 2013 ; Leung & Baccaglini-Frank, 2016).

Une évolution technologique récente, accessible sur des équipements actuellement largement disponibles, est susceptible de modifier les usages et le rapport aux objets géométriques. Il s'agit du *multi-touch* dans les interfaces tactiles (Sinclair *et al.*, 2016). Ces interfaces permettent d'associer les gestes et les dessins comme deux systèmes complémentaires pour désigner les objets géométriques et leurs propriétés (de Freitas & Sinclair, 2013 ; Jackiw, 2013). Par exemple, les dessins à main levée sur une tablette peuvent être reconnus et transformés en représentations géométriques, ce qui réalise un nouveau type d'interface (*Sketchometry*[6]). Enfin, la collaboration entre les utilisateurs, en local à

---

[4] Les détails de conception comptent, […] Dans la mesure où notre travail dans le domaine des technologies en mathématiques aspire à une influence en éducation à une échelle significative […] nous devons d'abord admettre que la conception compte – que les spécificités de la conception comptent tout spécialement – et ensuite développer un discours beaucoup plus riche pour l'analyse de la conception (notre traduction).

[5] https://www.xcasenligne.fr/giac_online/demoGiacPhp.php

[6] https://start.sketchometry.org/

plusieurs sur une même tablette grâce au *multi-touch* (Lai & White, 2014) ou à distance (Bellemain, 2014) est aussi une possibilité offerte par les derniers développements technologiques.

D. De l'importance des technologies conçues et adaptées aux utilisateurs

La géométrie dynamique est une technologie qui a maintenant plus de 30 ans et qui est facilement disponible. Elle est concernée par les évolutions technologiques mais ce qui importe principalement, ce n'est pas la technique, mais la qualité de l'environnement de travail qu'elle offre à l'utilisateur et son adéquation à ses objectifs. Or dans le contexte éducatif, cet utilisateur occupe deux positions distinctes, celle d'élève ou celle d'enseignant, n'ayant ni les mêmes besoins ni les mêmes activités avec la géométrie dynamique. Pour l'élève, il s'agit de pouvoir apprendre les mathématiques. Pour l'enseignant, le problème est bien différent, puisqu'il ne s'agit plus simplement d'apprendre ou de résoudre des problèmes mais de faire apprendre, c'est-à-dire enseigner avec la géométrie dynamique. Bien que le rôle de cette technologie de géométrie dynamique dans les processus d'apprentissage et d'enseignement ne soit pas encore complètement cerné (Sinclair *et al*., 2016), nous disposons déjà de connaissances utiles pour comprendre les phénomènes en jeu et proposer les premières solutions.

II. Questions d'apprentissage avec la géométrie dynamique

L'intérêt de la géométrie dynamique pour apprendre les mathématiques, la géométrie et les démarches propres aux mathématiques comme la preuve a été attesté dès son apparition par un grand nombre de travaux menés dans le monde entier.

En France, les résultats des dix dernières années sur les apprentissages des élèves avec la géométrie dynamique (Restrepo, 2008 ; Mithalal, 2010 ; Voltolini, 2018) ont été obtenus en étudiant comment les élèves se la sont appropriée et en dévoilant une part de la complexité de ce processus. L'approche instrumentale* (Rabardel, 1995 ; 1999) est un cadre théorique pour modéliser les processus d'appropriation d'une technologie. Appliqué à la géométrie dynamique, il a permis de situer certains des apports spécifiques de la géométrie dynamique aux situations d'apprentissage et d'identifier les difficultés des processus en jeu. L'approche instrumentale répond au besoin de décrire le fonctionnement des outils numériques, leur appropriation par les utilisateurs et leur rapport aux connaissances mathématiques mobilisées dans les résolutions de problème. Par exemple, le déplacement, c'est à-dire la possibilité d'attraper un point, de le déplacer et d'observer l'actualisation automatique de la figure (comme dans la Figure 1) est une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique (Kortenkamp, 1999), qui semble évidente au premier abord et qui est nécessaire pour faire des mathématiques avec la géométrie dynamique. L'étude de l'appropriation du déplacement par les élèves a été initiée par les travaux de Hölzl (1996) puis continuée en Italie et au Royaume-Uni (Arzarello, Olivero, Paola & Robutti, 2002 ; Olivero, 2002). Elle a été reprise en France avec l'approche instrumentale* ce qui a permis de distinguer différentes façons d'utiliser le déplacement (Restrepo, 2008) et d'étudier l'interaction entre ces différents usages et le développement d'autres raisonnements géométriques, notamment le raisonnement déductif (Soury-Lavergne, 2007 ; Mithalal, 2010). Au final, l'appropriation de cette fonctionnalité par les élèves se révèle complexe. C'est ce que nous développons, sous l'intitulé « genèse instrumentale* » dans cette partie II.

Les humains et les outils

Certains outils sont conçus pour permettre aux humains de réaliser une tâche, parce qu'elle serait impossible sinon, ou pour améliorer la performance lors de la réalisation d'une tâche. L'activité de conception a longtemps été centrée sur l'outil lui-même, qui doit posséder certaines caractéristiques pour améliorer la performance à la tâche. Mais cela ne suffit pas : l'outil n'est efficace que dans la mesure où l'humain réussit à l'utiliser, et même, à se l'approprier pour accomplir une tâche. L'outil numérique n'échappe pas à cette nécessité. De très nombreux travaux en anthropologie, psychologie, didactique, sociologie et ergonomie ont pour objectif de comprendre ce processus d'appropriation intrinsèquement lié à l'existence et l'utilisation d'un outil. Ces travaux sont très utiles pour analyser la façon dont les enseignants et les élèves s'approprient ou non les outils numériques pour enseigner et apprendre. Plusieurs idées sont importantes :

1. Les humains s'approprient un nouvel outil en fonction de la façon dont ils accomplissaient la tâche préalablement, avec éventuellement un outil plus ancien. La façon d'accomplir une tâche, c'est-à-dire la suite d'actions qui permet de la réaliser se stabilise chez un individu au fur et à mesure qu'il rencontre et accomplit des tâches du même type. Cette pratique stabilisée pour un ensemble de tâches est appelée schème. Il va être difficile de s'approprier un nouvel outil si celui-ci est incompatible avec le schème préalable.
2. Parfois, plusieurs individus au sein d'une communauté partagent une façon de faire les choses, une certaine façon d'accomplir certaines tâches. On parlera alors de schèmes sociaux, participant à la définition d'une pratique sociale ou d'un habitus. Partager la façon de faire les choses définit une culture. Les deux processus de base de transmission de la culture sont l'imitation et l'enseignement. Un individu qui ne fait pas comme les autres peut ne pas être considéré comme membre de la communauté, sa pratique étant perçue comme illégitime ou non assimilable dans la culture, celle du contexte scolaire par exemple.
3. Certaines tâches mobilisent plusieurs individus, qui interagissent pour les accomplir : par exemple résoudre un problème de façon coopérative. Les connaissances mises en œuvre dans les interactions entre humains sont parfois appelées compétences sociales.
4. Quand un individu s'est approprié un outil pour réaliser une tâche, on parle d'instrument pour signifier que cet individu a développé un schème d'utilisation associé à l'outil. Le processus qui consiste à construire et modifier le schème d'utilisation est appelé instrumentation. Réciproquement, lorsque l'on considère un outil indépendamment de son appropriation et utilisation par un individu, on parle d'artefact. L'appropriation de l'outil par un individu ne consiste pas seulement à développer un schème mais aussi à prendre en compte, sélectionner, regrouper détourner certaines des caractéristiques de l'artefact. Cet autre aspect du processus de constitution de l'instrument est l'instrumentalisation. Ce double processus d'appropriation instrumentation / instrumentalisation est appelé genèse instrumentale.
5. Quand un individu s'approprie un outil, il peut le mettre en œuvre pour des tâches qui n'étaient pas envisagées par le concepteur. L'individu a adapté l'outil à ses besoins et le détourne de son usage prévu initialement. Ce processus de détournement est appelé catachrèse. Il peut aller jusqu'à la modification de l'outil lui-même, révélant des possibilités d'évolution.

6. Les conditions pour que les enseignants et les élèves s'approprient un outil numérique au service de l'enseignement et de l'apprentissage sont nombreuses et difficiles à réunir, que l'usage de cet outil soit prescrit ou non :
    - Certains travaux insistent sur les qualités de l'outil lui-même : il doit être (a) utile (permettre de mieux enseigner et/ou de mieux apprendre) et perçu comme utile par les enseignants et les élèves, (b) utilisable (facile à prendre en main) et perçu comme utilisable, (c) acceptable (compatible avec l'organisation du temps, de l'espace, avec les outils, les tâches, les valeurs et les motivations des individus et les caractéristiques de l'institution dans lesquelles ils travaillent).
    - D'autres travaux insistent sur l'importance de la formation, nécessaire à la transformation des schèmes et à la compréhension de l'utilité de l'outil.
    - D'autres enfin mettent en exergue la dimension collective / culturelle de l'appropriation. L'appropriation individuelle est souvent vouée à l'échec, car les pratiques d'enseignement et d'apprentissage sont davantage des pratiques sociales. Faire vivre et accompagner de tels collectifs est un enjeu majeur et nécessaire pour que ces collectifs puissent intégrer, adapter et ajuster ces pratiques afin de les transformer en pratiques scolaires.

(Voir annexe au rapport Tricot pour le Cnesco, 2020).

A. Genèse instrumentale* du déplacement

Le déplacement est la fonctionnalité clé de la géométrie dynamique qui permet d'une part l'exploration des figures et d'autre part l'obtention de rétroactions, deux fonctions qui font des environnements de géométrie dynamique des espaces d'expérimentation mathématique. Mais, pour bénéficier de ces potentialités, il faut « faire bouger » les figures.

Or, le déplacement n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves. En effet, les premiers travaux sur l'utilisation de Cabri-géomètre avec des élèves faisaient mention d'un contrat Cabri qui consistait à faire bouger les figures quand on travaille avec le logiciel. Mais bien que cette règle du jeu ait été rendue explicite, Capponi et Laborde soulignent qu'elle n'était pas systématiquement mise en œuvre par les élèves : « Seulement certains aspects qui peuvent sembler immédiats pour un professeur, comme le rôle du déplacement dans la validation, ne sont pris en compte que très progressivement par les élèves. » (Capponi & Laborde, 1994, p. 12). Ainsi, cette règle du jeu ne s'est pas facilement instaurée et une fois que les élèves acceptaient de déplacer la figure, subsistaient encore de nombreuses difficultés (Soury-Lavergne, 2006). Les déplacements étaient fortement limités spatialement et à quelques points, conduisant à l'absence d'effet significatif. Lorsqu'il existait, l'effet n'était pas nécessairement analysé d'un point de vue géométrique. Il donnait plutôt lieu à des constats tels que "ça bouge" ou "ça monte", "la figure s'agrandit, s'aplatit" qui n'évoluaient pas nécessairement vers une analyse géométrique. Par exemple, à propos de la Figure 1, l'élève peut être intéressé par le fait que la figure a tourné ou que les quatre côtés restent liés, alors que l'enseignant verra en priorité la conservation des angles droits. Les élèves perçoivent prioritairement des relations spatiales et mécaniques alors que l'enseignant, de par ses connaissances mathématiques, lit directement les relations géométriques (Soury-Lavergne, 2006).

Ces constats ont rendu nécessaire de concevoir le déplacement non pas comme une fonctionnalité évidente de la géométrie dynamique, mais comme un instrument mathématique dont l'utilisation s'apprend. Rabardel (1995) propose d'appeler instrument* l'association d'un outil, ici la fonctionnalité déplacement de l'environnement numérique, avec une façon de savoir l'utiliser. Il s'agit de mettre l'accent sur le fait qu'un instrument n'est pas donné directement à l'utilisateur, mais résulte d'un processus d'appropriation, qualifié de genèse instrumentale*. Cette genèse instrumentale est importante pour l'éducation, car elle permet de poser la question de ce qu'apprend l'élève lorsqu'il apprend à utiliser un logiciel. Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit de déterminer ce qu'il apprend lorsqu'il fait bouger les figures avec la géométrie dynamique. À partir d'un recensement des différentes tâches utilisées dans les recherches sur la géométrie dynamique et du rôle qu'y joue le déplacement, Restrepo (2008) a décrit différents types de déplacement et proposé une classification en croisant les finalités et contraintes de l'artefact avec les finalités et contraintes mathématiques. Elle distingue alors sept instruments déplacements différents (classification plus générale que celle d'Arzarello *et al.* (op.cit), résumée dans (Soury-Lavergne, 2017)), parmi lesquels le déplacement pour ajuster une figure, le déplacement pour invalider une construction et le déplacement pour valider. Les études conduites au début du collège ont permis d'identifier à la fois les situations favorables à l'émergence de ces différents instruments et les instruments effectivement construits par les élèves. Un résultat à retenir est qu'il existe un ordre dans l'apparition des différents instruments déplacements. Au cours d'une genèse instrumentale*, le déplacement pour ajuster apparaît toujours en premier et très tôt. La validation par déplacement n'apparaît que plus tardivement, très progressivement, dans un premier temps pour permettre d'invalider une construction et non pour la valider.

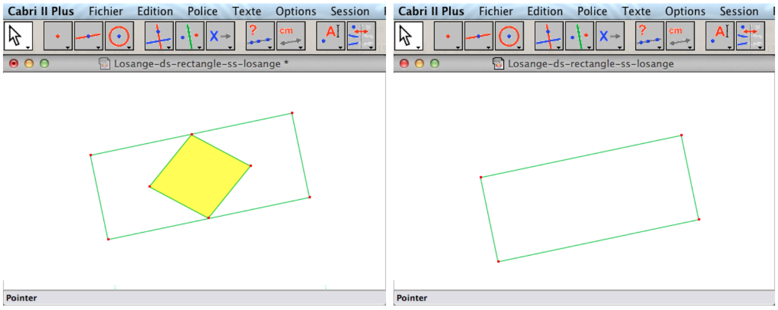
Ainsi, l'utilisation de la géométrie dynamique pour valider et invalider une construction ou pour identifier les invariants géométriques d'une figure n'est pas disponible initialement chez les élèves de collège. Or, il s'agit d'un des principaux arguments en faveur de l'utilisation de la géométrie dynamique dans l'enseignement. Une des explications aux difficultés d'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques des enseignants réside peut-être dans le fait que l'objectif visé n'est en définitive pas immédiatement accessible.

B. Constructions robustes et constructions molles en géométrie dynamique

Si le déplacement pour valider une construction n'est pas immédiatement disponible et que la genèse instrumentale* du déplacement par les élèves est longue et complexe, il est alors nécessaire de prendre en considération les figures effectivement produites par les élèves pour pouvoir comprendre comment on apprend les mathématiques avec la géométrie dynamique. Il y a là un argument supplémentaire à la nécessité de distinguer construction robuste et construction molle, distinction introduite par Hölzl (1996) puis reprise par d'autres collègues (Healy, 2000 ; Laborde, 2005).

Les premiers usages de la géométrie dynamique ont consisté à explorer ou à chercher à construire des figures robustes par déplacement, c'est-à-dire des figures qui conservent leurs propriétés géométriques au cours du déplacement (comme le rectangle de la Figure 1). Il s'agissait d'exploiter prioritairement la propriété propre à la géométrie dynamique de conservation des propriétés géométriques et de préférence en posant les problèmes d'une façon impossible à mettre en œuvre sans la technologie (justifiant ainsi l'intérêt de cette technologie). Les boîtes noires (Figure 3) sont des tâches qui consistent à reconstruire une figure dynamique robuste, identique au modèle donné. Ce sont des exemples de tâches qui n'existent pas sans la géométrie dynamique car elles reposent sur l'exploration et la reproduction du comportement dynamique de la figure. La résolution d'un problème de boîte noire requiert différents usages du déplacement, d'abord pour explorer le modèle puis pour valider ou invalider la reconstruction.

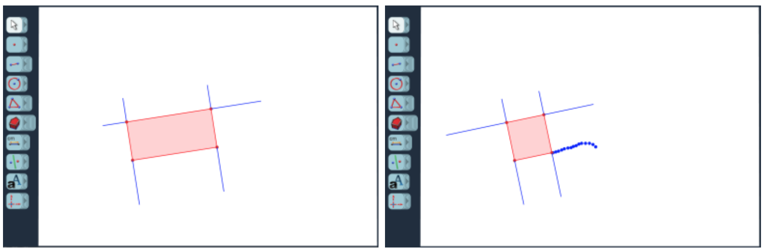
Figure 3. Une boîte noire dans Cabri-géomètre



Note : Dans une boîte noire, une figure est donnée comme modèle à reproduire (à gauche). La tâche consiste à reconstruire, à partir d'une amorce (à droite), la figure ainsi que son comportement dynamique, de manière à ce qu'elle se comporte de façon identique au modèle au cours du déplacement. Le modèle est manipulable mais ne donne pas accès à l'historique de construction. Pour réussir, il faut identifier les propriétés géométriques de la figure modèle et les utiliser pour la reconstruction. La résolution d'un problème de boîte noire correspond à la recherche d'une figure robuste.

Une construction est dite molle (voir une présentation dans Soury-Lavergne, 2011) en référence à un objet géométrique ou un théorème, lorsqu'elle en vérifie toutes les hypothèses par construction, à l'exception de l'une d'entre elles qui est ajustée momentanément et localement.

Figure 4. Exemple de construction molle d'un carré



Note : À partir d'un rectangle construit avec ses angles droits (à gauche), un carré peut être obtenu par déplacement en ajustant perceptivement deux côtés consécutifs pour qu'ils aient la même longueur (à droite avec trace du déplacement du sommet). Il s'agit alors d'une construction molle du carré, reposant sur le fait qu'un carré est un rectangle avec deux côtés consécutifs de même longueur, mais cette égalité de longueur (l'hypothèse manquante) est obtenue par ajustement.

Cette distinction entre construction robuste et construction molle a permis de prendre en compte les processus de résolution de problème effectivement observés chez les élèves et de les transformer en opportunités pour apprendre. Les constructions molles permettent de considérer les constructions des élèves, non pas comme des constructions robustes inachevées, mais comme de véritables moyens d'expérimenter la nécessité mathématique. Par son action au moment d'ajuster la figure et de satisfaire la dernière condition, l'élève fait l'expérience de l'obtention de la bonne figure comme conséquence nécessaire des hypothèses. Par exemple, lorsqu'un élève cherche à obtenir un carré à partir du rectangle déjà construit (

Figure 4), l'ajustement final consiste à satisfaire l'hypothèse de la propriété « un rectangle ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un carré ». L'action possible et les conséquences de cette action lui permettent de prendre conscience du rôle de la propriété d'égalité de longueur de deux côtés consécutifs pour passer du rectangle (figure robuste) au carré (figure molle). L'utilisation du déplacement et des constructions molles dans la résolution de problèmes ouverts a été étudiée pour caractériser les processus cognitifs sous-jacents à la formulation de conjectures et discuter la question de la reconnaissance des invariants dans les figures dynamiques (Leung, Baccaglini-Frank & Mariotti, 2013).

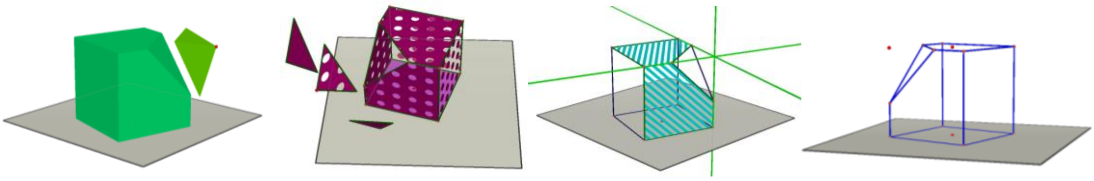
C. Géométrie dynamique et démarche de preuve au collège et au lycée

Avec les travaux précédents, il est apparu clairement que le déplacement n'allait pas de soi, en particulier son utilisation pour valider ou invalider une conjecture, donc son instrumentation pour les démarches de preuve. Pourtant, la géométrie dynamique a été très largement utilisée pour faire entrer les élèves dans une démarche de preuve et de réfutation et étudier leur développement (Balacheff, 1999 ; Laborde, 2000 ; Mariotti, 2000 ; Sinclair & Robutti, 2012 ; Komatsu & Jones, 2018).

Au collège, le recours à la géométrie dynamique pour l'initiation au raisonnement déductif s'est fondé sur différentes distinctions, la première étant celle entre dessin et figure (Laborde & Capponi, 1994). Le *dessin* désigne une représentation matérialisée sur un support, telle qu'un trait de crayon sur une feuille de papier ou une série de pixels sur un écran (par exemple les illustrations des Figure 1 et Figure 2 à gauche sont des dessins de rectangle). Il se distingue de la *figure* qui est un objet abstrait régi par une théorie et des propriétés géométriques. L'épaisseur du trait est une propriété du dessin mais pas de la figure alors qu'avoir des diagonales qui se coupent en leur milieu est une propriété de la figure rectangle pas nécessairement visible dans le dessin. Le travail géométrique et la démarche de preuve se situent au niveau de la figure tout en s'appuyant sur les dessins. La géométrie dynamique offre un moyen d'accéder à cette distinction, car elle permet de générer simplement par déplacement plusieurs dessins différents pour une même figure, faisant apparaître les propriétés de la figure comme ce qui reste invariant à travers les différents dessins. Plusieurs travaux ont exploité cette distinction figure-dessin pour engager les élèves dans une démarche de preuve. Les travaux de Coutat (2006) ont étudié la conceptualisation de la notion de propriété géométrique à partir des constructions molles en proposant un moyen de distinguer les hypothèses (obtenues par ajustement) des conclusions (obtenues indépendamment de la volonté de l'utilisateur). D'autres ingénieries ont exploité la distinction entre les propriétés données (hypothèses) et les propriétés déduites (conclusions) pour faire apparaître le raisonnement déductif comme une réponse à un besoin de compréhension d'un phénomène surprenant et non comme un exercice formel (Soury-Lavergne, 2007).

Le travail de Mithalal (2010 ; Mithalal & Balacheff, 2019) a consisté à utiliser la géométrie dynamique, en l'occurrence la géométrie dans l'espace, pour faire sentir aux élèves la nécessité d'un contrôle théorique sur la figure, au fondement de la démarche de preuve. Mithalal est parti du constat que la perception était très rapidement déstabilisée au cours de la manipulation de représentations d'objets géométriques dans un environnement de géométrie dynamique à trois dimensions (3D). En effet, l'interface numérique d'un environnement de géométrie dans l'espace reste à deux dimensions. Cela rend quasiment impossible l'ajustement perceptif de la position d'un objet. Par exemple, il est très difficile de placer un point sur la face d'un cube à l'œil, alors qu'avec un cube matériel ou un dessin papier la réussite est immédiate. Avec la géométrie dynamique 3D, on pense avoir réussi, et dès que le point de vue change, on se rend compte que le point n'est pas du tout là où on pensait l'avoir créé. La géométrie dynamique 3D déstabilise l'évidence visuelle et rend nécessaire une évolution vers des contrôles théoriques. Par exemple, pour être sûr que le point est sur la face du cube, on peut le construire comme le milieu de deux sommets, ce qui manifeste le recours aux propriétés des faces d’un cube, des carrés, etc. De plus, le processus est facilité en comparaison avec le papier-crayon car l’environnement permet de manipuler et de construire aisément des représentations 3D et d’obtenir des rétroactions visuelles très riches. Il a donc été possible de concevoir des situations didactiques, telle que « le cube tronqué » (Figure 5), pour provoquer l’évolution de la façon de « voir » les objets géométriques. Pour Duval (2005), la vision iconique est définie comme la reconnaissance perceptive et globale des objets (on reconnaît un cube de la même manière qu’on reconnaît le visage d’une personne familière et comme le fait un élève de maternelle). La vision iconique ne caractérise pas le travail géométrique. En revanche, faire de la géométrie, c’est mobiliser une visualisation non iconique qui consiste à déconstruire la figure pour identifier des objets géométriques la composant et des propriétés entre ces objets. Duval parle de déconstruction dimensionnelle pour indiquer que les objets constitutifs à identifier ont des dimensions mathématiques inférieures à celle de la figure de départ. Le cube est un objet 3D, ses faces sont des objets plans (2D), ses arêtes des objets à une dimension (1D) et ses sommets des points de dimension nulle. C’est la mobilisation de ces objets de plus petite dimension et de leurs propriétés dans le raisonnement et la résolution du problème qui caractérise la démarche géométrique. La géométrie dynamique dans l’espace fait appel directement à ce processus (Mithalal & Balacheff, 2019).

Figure 5. Quatre déconstructions dimensionnelles impliquées dans la reconstruction du sommet manquant d’un cube



Note : Un cube privé d’un sommet est présenté dans l’environnement de géométrie dynamique 3D. La tâche est de reconstruire le sommet manquant. Cette tâche peut être accomplie en construisant un tétraèdre (objet 3D). Elle peut consister à construire trois triangles rectangles (compléments des faces coupées du cube), qui sont des objets plans. Elle peut passer par la construction de trois droites support des côtés, une droite étant un objet à une seule dimension. Elle peut aussi être réalisée par la construction du sommet manquant du cube qui est aussi le sommet manquant d’une face. Ces quatre constructions (de gauche à droite) s’appuient sur différentes décompositions du cube en objets d’égales ou de plus petites dimensions et leur relation.

Ces travaux montrent l’intérêt de la géométrie dynamique pour construire de nouvelles connaissances en mathématiques tout en indiquant les difficultés à envisager, liées notamment aux genèses instrumentales du déplacement. Réciproquement, la géométrie dynamique apparaît aussi comme un moyen de concevoir des situations provoquant un développement conjoint des connaissances géométriques des élèves et de leur façon d’utiliser la géométrie dynamique. Les deux processus d’apprentissage sont intimement liés. En conséquence, il n’y a pas de prérequis en terme de connaissances géométriques pour pouvoir utiliser la géométrie dynamique, ce qui a permis d’envisager son usage dès l’école primaire pour les premiers apprentissages.

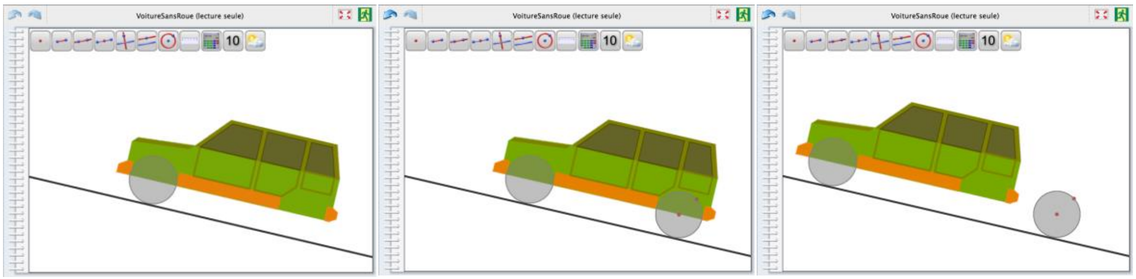
D. Premiers apprentissages avec la géométrie dynamique

Au premier degré, l’enjeu est d’amener les élèves à la géométrie à partir de leurs connaissances spatiales sans toutefois négliger le développement de ces connaissances spatiales pour elles-mêmes (Perrin-Glorian, Mathe & Leclercq, 2013). L’utilisation de la géométrie dynamique mobilise conjointement les connaissances spatiales et les connaissances géométriques car elle rend visibles à l’interface du logiciel les propriétés théoriques géométriques sous la forme de propriétés spatiales invariantes au cours du déplacement. Un rond bien régulier, reconnu globalement, est un objet spatial. Pour obtenir un beau rond en géométrie dynamique, il faut utiliser l'objet géométrique cercle et une de ses définitions, par exemple basée sur son centre et son rayon. Ainsi, au cours de la construction d'une figure, la géométrie dynamique met en relation un regard global contrôlé par la perception avec une analyse contrôlée par les connaissances géométriques (Duval, 2005). Un autre intérêt de la géométrie dynamique au premier degré résulte du fait que la connaissance géométrique fonctionne comme un outil de résolution de problème et pas seulement comme un objet à décrire et étudier (Douady, 1986).

1. Solutions pour inciter au déplacement

Néanmoins, les difficultés rencontrées au second degré ont été retrouvées dans le premier degré, en particulier la difficulté des élèves à accepter de déplacer les figures, et particulièrement en attrapant les points de la figure et pas seulement la figure globalement. Cela confirme la non-conceptualisation des points géométriques à ce niveau scolaire (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015a). Deux stratégies complémentaires ont été suivies pour améliorer l'utilisation du déplacement par les élèves du premier degré. La première a été de proposer des situations contextualisées qui incitent au déplacement, comme la figure du « Pajerond » avec une voiture qui roule (Restrepo, 2008 ; Soury-Lavergne & Maschietto, 2012) (**Figure** 6). La seconde a été de concevoir une fonctionnalité spécifique dans le logiciel qui déplace automatiquement les points de la figure, comme par exemple le *Monkey* du logiciel CaRMetal (Martin, 2010).

Figure 6. « Pajerond » ou le contexte comme moyen d'inciter au déplacement



Note : Il s'agit de construire la roue manquante de la voiture (figure initiale à gauche). La voiture renvoie à un contexte non mathématique qui incite au déplacement. Au milieu, exemple d'une construction réalisée avec un cercle ajusté perceptivement. D'un point de vue spatial, le problème semble résolu. À droite, la rétroaction obtenue par déplacement de la voiture invalide la construction. Pour satisfaire ses attentes spatiales (la roue reste ronde et attachée à la voiture), l'élève devra les transformer en construction géométrique (définir le centre du cercle comme milieu du diamètre correspondant à un segment à l'arrière de la voiture).

2. Articulation du tangible et du numérique en géométrie

Un autre développement de la géométrie dynamique, lié à son usage au premier degré a été son articulation avec les autres environnements de travail également mobilisés en géométrie, en particulier la manipulation des instruments de construction (règle, compas…) et les objets matériels tangibles (comme des cubes en bois par exemple). Si l'enjeu initial des recherches en géométrie dynamique a été de démontrer sa valeur ajoutée par rapport aux autres environnements, c'est une problématique de complémentarité et d'articulation entre les différents environnements qui a émergé à partir des années 2000. Des ingénieries ont été conçues, expérimentées et diffusées (comme

MAGESI[7] (Rolet, 2003) ou Bombrun & Thomas, 2014). Elles ont recours à plusieurs environnements, caractérisés à la fois par des différentes tailles d'espace (micro, méso ou macro espace) et par différents systèmes d'instruments : ceux de la géométrie dynamique, ceux du papier-crayon et ceux de l'environnement spatial de la cour de l'école. Pour un même problème de construction, les stratégies de résolution des élèves diffèrent d'un environnement à l'autre. Construire un cercle dans la cour est possible avec une corde, mais pas avec un compas. Le compas est adapté pour construire un cercle sur une feuille de papier mais en géométrie dynamique, c'est l'outil « cercle » qui est privilégié pour obtenir un cercle. À travers ces différentes constructions, c'est l'objet géométrique abstrait qui émerge. L'objectif de ces études n'a pas été de déterminer quel est le meilleur environnement, mais d'étudier l'imbrication des problèmes et des dimensions techniques et conceptuelles de leur résolution dans le passage entre les différents environnements, et de caractériser leurs effets sur la conceptualisation des notions géométriques.

C'est sur cette piste, combinant le matériel tangible, le numérique et les usages variés du déplacement dans les situations didactiques, que les développements les plus récents relatifs à l'utilisation de la géométrie dynamique ont été réalisés. L'idée est de s'appuyer sur les continuités et ruptures entre les objets matériels tangibles et les environnements numériques pour concevoir des situations d'apprentissage. Ces situations reposent sur le recours organisé à différents artefacts* tangibles et numériques pour provoquer chez les élèves l'apprentissage de notions mathématiques.

Par exemple, la construction à la règle et au compas d'un triangle étant donné les longueurs de ses côtés est source de difficulté pour nombre d'élèves de cycle 3. La difficulté des élèves réside à la fois dans les usages qu'ils associent au compas, principalement pour construire des cercles, et dans leur conception du triangle (leur vision iconique telle que mentionnée en C, page 15, ne leur permet pas d'envisager le sommet d'un triangle comme l'intersection de deux arcs de cercle). Voltolini (2017) a conçu une situation fondée sur l'articulation du numérique et du tangible qui permet aux élèves de CM2 de faire évoluer leur conception du triangle grâce à une nouvelle façon d'utiliser le compas. Il s'agit d'utiliser le compas « pour faire tourner les segments ». Ce nouvel usage du compas, qui peut être considéré comme un nouvel instrument compas, résulte d'un recours combiné à la géométrie dynamique et aux constructions en papier-crayon. Il permet alors de faire apparaître chez les élèves une nouvelle conception du triangle, comme « ligne brisée refermée » plus géométrique que la vision iconique initiale. Voltolini a démontré que l'instrument « compas » issu de l'articulation du tangible et du numérique joue un rôle décisif dans l'évolution attendue des conceptions des élèves relatives au triangle. Ce travail a permis d'expliciter le lien entre les genèses instrumentales* et les genèses de connaissances chez les élèves.

Ce type de travaux a conduit à étudier et définir à quelles conditions les associations du numérique et du tangible peuvent être productives pour l'apprentissage, car il ne s'agit pas simplement de juxtaposer des environnements de travail. Pour que cela soit intéressant du point de vue de l'apprentissage, il faut qu'il y ait des complémentarités, des redondances et des antagonismes entre les artefacts*. Les complémentarités justifient le passage d'un artefact* à l'autre car ce qu'on ne peut pas obtenir dans un environnement est possible dans l'autre et réciproquement. Les redondances amènent l'utilisateur à investir et transférer les façons de faire d'un environnement à l'autre et mettre les deux en relation. Les antagonismes enfin, c'est-à-dire les impossibilités et les contradictions entre

[7] http://magesi.ens-lyon.fr/

les deux environnements, sont la source de l'adaptation et des évolutions nécessaires au cœur de l'apprentissage. Elles contraignent à modifier et généraliser, à prendre conscience des domaines de validité et à évoluer vers plus d'abstraction. De telles associations sont baptisées « duos d'artefacts* tangibles et numériques » (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015 ; Soury-Lavergne, 2017).

La problématisation des questionnements sur les environnements numériques en terme de duos d'artefacts* tangibles et numériques est une façon d'extraire ces recherches du « tout numérique » et de repenser les apports du numérique, ici de la géométrie dynamique, au sein d'un ensemble plus varié d'outils et d'environnements. C'est une piste pour répondre aux interrogations croissantes sur les effets éventuellement néfastes des écrans (Bach *et al.*, 2013 ; Duché, 2019).

E. Avec la géométrie dynamique, des apprentissages incontestables malgré des difficultés résistantes

À partir de ces travaux, il est possible de retenir quelques critères pour qu'une situation d'utilisation de la géométrie dynamique soit favorable à l'apprentissage : (i) choisir des technologies de qualité, en particulier celles qui sont conçues de manière cohérente avec les apprentissages mathématiques visés en plus d'être facilement utilisables ; (ii) avoir recours au déplacement, systématiquement, mais pas uniquement pour valider ou invalider des constructions robustes, le reconnaître également comme moyen d'exploration et de résolution de problème ; (iii) utiliser des situations où les connaissances géométriques fonctionnent comme outil de résolution de problème et motivent la recherche de justifications et de preuves autrement que pour valider un constat d'invariance ; (iv) rechercher une articulation avec les différents environnements de résolution de problèmes géométriques, notamment les environnements s'appuyant sur du matériel tangible.

Cependant ces résultats positifs sur les apprentissages n'ont pas été suivis d'une diffusion et d'une appropriation massive par le système scolaire. Les travaux de recherche ont alors pris en considération d'autres contraintes que l'utilité de la géométrie dynamique pour apprendre et ont abordé les questions d'enseignement et de pratique des enseignants.

III. Questions d'enseignement et de développement professionnel des enseignants

Au début des années 2000, le constat a pu être fait que l'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques des enseignants n'irait pas de soi, constat qui semble toujours valide deux décennies plus tard. D'une part, la géométrie dynamique n'est pas forcément utilisée dans les situations pour lesquelles son utilité est avérée. D'autre part, lorsqu'elle est utilisée, les tâches que les enseignants proposent à leurs élèves diffèrent de celles qui sont considérées du point de vue de la recherche comme les plus pertinentes pour les apprentissages (Laborde & Laborde, 2011). Plusieurs pistes ont été explorées pour en comprendre les raisons et pour envisager des solutions : diffuser les bonnes pratiques, étudier les conditions réelles des pratiques enseignantes, former les enseignants et les impliquer au sein de collectifs de concepteurs de ressources et de dispositifs. Les recherches françaises sur la géométrie dynamique du point de vue des usages des enseignants sont néanmoins contemporaines de l'apparition de la géométrie dynamique, il y a plus de 25 ans. Les premières problématiques ont été la modélisation des décisions didactiques en condition de laboratoire (Tahri,

1993) ou dans des situations d'enseignement particulières telles que le préceptorat distant (Soury-Lavergne, 1998). À partir des années 2000, les pratiques ont été étudiées en conditions réelles d'enseignement ou de formation (Tapan, 2006 ; Lima, 2006 ; Abboud, Clark-Wilson, Jones & Rogalski, 2018).

Ces travaux ont fait apparaître que les processus de genèse instrumentale* sont critiques pour l'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques existantes (Grugeon-Allys, 2008). Or, le problème qui se pose à tout utilisateur d'une technologie, comme illustré dans la partie II de ce rapport, est encore plus complexe pour l'enseignant : on parle de double genèse instrumentale pour l'enseignant (Artigue, 2002 ; Haspekian, 2014). Ce dernier doit connaître la géométrie dynamique pour résoudre des problèmes mathématiques, mais il doit aussi savoir organiser les conditions pour l'apprentissage avec la géométrie dynamique, ce qui n'est pas la même chose et est loin d'être évident. À ce sujet, l'importance accordée aux tâches proposées aux élèves et le décalage entre celles utilisées par les enseignants et celles utilisées par la recherche (Laborde, 2001 ; Leung & Bolite-Frant, 2015) caractérisent les pratiques des enseignants. Les problématiques de recherche ont alors évolué de l'étude de la technologie de façon isolée à l'étude de la technologie comme partie d'un ensemble plus complexe d'équipements, de logiciels, de situations d'utilisation et d'utilisateurs, pouvant chacun, tour à tour ou de façon combinée, devenir une ressource pour apprendre et faire apprendre (Gueudet & Trouche, 2009). L'enseignant ne doit donc pas seulement choisir une technologie à la place d'une autre, pour enseigner une notion, mais comparer, combiner et compléter les technologies et les ressources entre elles. C'est un système d'instruments, élaboré à partir d'une collection de ressources incluant les technologies, que l'enseignant doit orchestrer (Trouche, 2003 ; Drijvers, Doorman, Boon, Reed & Gravemeijer, 2010).

Les questions d'appropriation des EIAH et des ressources par les enseignants ont été abordées initialement par l'identification de besoins en formation, l'étude de ces formations et le constat des difficultés (Tapan, 2006). Or la prise en compte de l'interdépendance entre l'usage de la géométrie dynamique et l'ensemble des activités de l'enseignant (Drijvers, 2012), notamment celles concernant les ressources, a conduit à envisager l'accompagnement de ces processus autrement que par la seule formation. C'est en adoptant le point de vue des ressources, de leur rôle au sein des collectifs et de la continuité des processus de conception et d'usage, que de nouvelles façons de traiter le problème de l'appropriation de la géométrie dynamique par les enseignants ont émergé. En particulier, les travaux sur la qualité des ressources de géométrie dynamique ont montré comment le développement professionnel des enseignants pouvait résulter de collectifs constitués pour analyser et faire évoluer la qualité des ressources (Trgalova, Soury-Lavergne & Jahn, 2011).

A. Conception de tâches avec la géométrie dynamique et limites d'une approche en terme de « bonnes pratiques »

Une des premières pistes pour aider l'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques des enseignants a été de concevoir et mettre à leur disposition des situations et des fichiers « prêts à l'emploi » répondant à leurs besoins et adaptés à leurs contraintes d'exercice (Sinclair, 2003). Mais une telle démarche est questionnable. Si elle apporte une réponse à la question de l'intérêt pour l'apprentissage des situations proposées, elle ne résout pas celui de leur appropriation et de leur utilisation effective avec les élèves. En effet, les situations issues de la recherche ont des caractéristiques qui les rendent parfois difficilement acceptables par les enseignants.

Par exemple, la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) a fortement marqué les travaux grenoblois sur Cabri-géomètre et a conduit à porter une attention toute particulière au fonctionnement de la connaissance géométrique comme outil de résolution de problème. Dans ce cadre théorique, la connaissance visée par l'apprentissage doit non seulement être incontournable dans la stratégie gagnante pour résoudre le problème, mais en outre, il doit exister initialement, du point de vue de l'élève, un choix avéré entre différentes stratégies possibles avec une incertitude sur celle qui permet effectivement de réussir à résoudre le problème. Si l'incertitude initiale est centrale pour l'apprentissage, elle n'est pas forcément comprise par les enseignants, en particulier parce qu'elle peut être confondue avec l'exploration libre d'une figure de géométrie dynamique par les élèves, qui n'est pas toujours très productive et n'aboutit pas nécessairement aux conclusions mathématiques attendues. Du coup, les enseignants cherchent à réduire les possibilités d'exploration des figures pour mieux en contrôler l'issue (Ruthven, Hennessy & Deaney, 2008). Ils guident les constructions par des fiches détaillées, indiquent les points à déplacer et attendent des élèves qu'ils observent les propriétés pertinentes, en particulier l'invariance. Mais dans ce processus contraint, les élèves déplacent les points sans attente particulière, sans avoir eu la nécessité d'en anticiper les conséquences sur la figure. D'ailleurs, qu'ils anticipent ou pas, le résultat ne change rien aux observations possibles. En conséquence, ils ne font pas les observations qui leur permettraient d'arriver à des conclusions mathématiques, mais énoncent les propriétés qu'ils pensent que l'enseignant attend. Une telle organisation des tâches ne produit pas des situations robustes pour l'apprentissage. C'est tout à fait différent lorsque les tâches explicitent la configuration recherchée sans donner d'indications sur les moyens d'y arriver. Par exemple, à propos des sections du cube, une tâche peut consister à donner le programme de construction du cube et d'un plan, à désigner un point à déplacer et à demander ensuite aux élèves d'observer cette section et de la caractériser. Les élèves n'ont pas de choix pour explorer la figure, leur incertitude porte sur la forme de la section qu'ils doivent reconnaître (la conséquence de la construction) et pas sur la stratégie à mettre en œuvre. Une alternative plus fructueuse consiste à donner le programme de construction du cube puis à demander aux élèves de trouver comment positionner un plan de manière à obtenir une section triangulaire (Soury-Lavergne & Maschietto, 2012). Les élèves explorent alors la construction avec un critère explicite de réussite. Et lorsqu'ils obtiennent le triangle, ils sont en mesure de faire le lien avec les conditions permettant de l'obtenir puisque ce sont ces conditions qui ont été l'objet de leur recherche. L'incertitude, qui porte sur les conditions de la construction, et non pas sur les conclusions, ne génère pas de l'ambiguïté. Au contraire, elle crée pour les élèves un espace d'exploration encadré, dans lequel la liberté d'exploration et l'identification des conséquences de l'action sont productives pour l'apprentissage.

La géométrie dynamique peut être utilisée par les enseignants pour jouer *un rôle d'amplificateur* de la précision ou du nombre de cas traités en comparaison à l'utilisation du papier-crayon. Tout en facilitant le travail mathématique, cet usage ne le modifie pas fondamentalement. La géométrie dynamique peut aussi être utilisée pour jouer *un rôle de générateur* de contraintes et d'affordances relatives aux outils et de nouvelles tâches qui n'auraient pas de signification sans technologie et permettant la réorganisation des connaissances (Pea, 1985 ; Laborde, 2001 ; Soury-Lavergne, 2017). Ces différents usages de la géométrie dynamique, pour amplifier ou pour générer, et les principes pour la conception de tâches avec la géométrie dynamique ont été diffusés aux enseignants et aux formateurs à travers des ressources, des séminaires, des formations et des publications de vulgarisation. Cependant, cette diffusion de « bonnes pratiques » s'est révélée insuffisante à provoquer une profonde évolution des pratiques. Soutenir l'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes requiert un changement de point de vue sur ces pratiques. Ce ne sont pas seulement les pratiques en classe qu'il faut considérer, mais aussi celles hors de la classe, lorsque les enseignants préparent les cours, lorsqu'ils cherchent des ressources, se les approprient et les organisent en vue de leur enseignement. De plus, en considérant ces ressources au sein d'un ensemble qui devient cohérent, à travers la pratique d'un enseignant, il devient possible de décrire les processus d'appropriation et de pouvoir les favoriser. Ce changement de point de vue passe par l'élargissement de la question des technologies à celles des ressources et des systèmes d'instruments construits par les enseignants (Gueudet & Trouche, 2008 ; Drijvers *et al.*, 2010).

B. Pratiques enseignantes déclarées

La deuxième piste de recherche a été de décrire et d'étudier les pratiques des enseignants en contexte réel, de modéliser les processus d'intégration afin de mieux les comprendre et de pouvoir les faire évoluer. Des études de cas, produisant des résultats qualitatifs à partir d'un petit nombre d'enseignants suivis de façon approfondie, ont pour objectif d'identifier les contraintes et possibilités agissant sur la situation d'enseignement et de comprendre pourquoi l'évolution des pratiques n'est ni immédiate ni aisée (Abboud & Rogalski, 2017 ; Abboud *et al.*, 2018). Elles sont utilement complétées par un état des lieux plus global que nous avons pu dresser grâce à une étude récemment conduite auprès d'enseignants en mathématiques exerçant essentiellement en collège et lycée. Réalisée en ligne, en mars 2019, via un questionnaire de 14 questions, qui a recueilli 1 147 réponses exploitables, elle permet de caractériser les pratiques actuelles des enseignants relatives aux technologies et en particulier à la géométrie dynamique. Nous présentons les principaux résultats de cette étude.

1. Les enseignants, leurs formations et leurs ressources de géométrie dynamique

Les répondants sont des enseignants des académies de Grenoble, Lyon, Créteil et Limoges (pour 96 % des répondants), avec une ancienneté importante (70 % de l'effectif ont une ancienneté de plus de 10 ans), qui se répartissent selon les niveaux scolaires en 4 % au premier degré, 44 % au collège et 50 % au lycée (2 % des répondants ne se reconnaissent dans aucun de ces niveaux). Ils n'ont, pour 45 % d'entre eux, suivi aucune formation relative à la géométrie dynamique, 23 % ont suivi uniquement une formation institutionnelle (par exemple inscrite à un plan académique de formation), 15 % ont été formés par un autre moyen exclusivement (tel que la participation à un collectif comme décrit en partie C, page 24) et 17 % des enseignants de l'étude cumulent plusieurs modalités de formation. Ainsi, les formations institutionnelles touchent 72 % des enseignants formés (40% des enseignants questionnés) et les autres modalités de formation touchent 59 % des enseignants formés, sachant que 31 % des formés cumulent plusieurs modalités. Les pratiques de ces enseignants ne résultent donc pas de formations pour nombre d'entre eux, ce qui se retrouve dans l'origine des ressources et notamment des fichiers de géométrie dynamique utilisés. De fait, la majorité des figures de géométrie dynamique qu'utilisent les enseignants sont des fichiers personnels qu'ils ont conçus puis conservés au cours de leur carrière (60 % des enseignants disent que la majorité ou quasiment tous leurs fichiers sont de ce type). Parmi les enseignants faisant référence à d'autres sources pour la majeure partie de leurs fichiers, 48 % n'en précisent pas l'origine, 9 % déclarent s'appuyer principalement sur les fichiers des manuels. Pour 7 % il s'agit de fichiers d'origine mixte, récupérés auprès des collègues, de sites internet et modifiés, pour être adaptés. Seuls 3 % des enseignants mentionnent les formations comme étant à l'origine des fichiers de géométrie dynamique qu'ils utilisent. Cette information sur l'activité de conception et d’adaptation des fichiers par les enseignants est cohérente avec les 65 % qui déclarent travailler avec la géométrie dynamique en dehors de la classe (le temps nécessaire pour préparer ces ressources). Le fait qu’une partie importante des fichiers de géométrie dynamique soient construits dans le temps par les enseignants eux-mêmes indique pourquoi leur évolution et leur remplacement seront coûteux pour les enseignants. Cela peut expliquer la stabilité ou l’évolution lente des pratiques dans le temps et l’importance d’étudier ces ressources avec le travail hors classe des enseignants.

2. Les pratiques avec la géométrie dynamique, fréquence et caractéristiques

Parmi les technologies utilisées par les enseignants, la géométrie dynamique est clairement identifiée comme étant utilisée fréquemment. 45 % des enseignants disent l’utiliser une ou deux fois par mois ou plus souvent alors que 25 % d’entre eux ne l’utilisent que très rarement ou jamais. Les autres technologies déclarées comme étant utilisées fréquemment par de nombreux enseignants sont la calculatrice (66 % des enseignants déclarent utiliser la calculatrice presque à chaque heure de cours) et les logiciels de programmation (43 % des enseignants). Les autres technologies, telles que grapheurs, calcul formel, exerciseurs… sont déclarées comme utilisées très rarement par plus de 65 % des enseignants. Les 15 % d’utilisateurs très fréquents de la géométrie dynamique, au moins toutes les semaines, sont plutôt des enseignants de lycée général et technologique. Les utilisateurs fréquents, une ou deux fois par mois ou plus, sont pour moitié en collège et pour moitié en lycée. Ainsi, la géométrie dynamique est un outil régulier pour près de la moitié des enseignants de l’étude, confirmant sa place effective dans les pratiques. GeoGebra est le logiciel très majoritairement utilisé par les enseignants (80 % d’entre eux), 5 % utilisent Cabri ou Cabri 3D et 10 % utilisent d’autres logiciels de géométrie dynamique.

Lorsque les enseignants utilisent la technologie, c’est associé à une pratique expérimentale des mathématiques (expérimenter, simuler et conjecturer), au moins une fois par trimestre pour 71 % des enseignants. En revanche, la recherche de contre-exemples grâce à la technologie n’est jamais arrivée au cours de l’année pour 54 % des enseignants, ce qui semble en contradiction avec l’approche expérimentale. Dans le déroulement des séances, la géométrie dynamique est majoritairement associée à des phases de recherche (34 % des répondants). Mais 38 % de ceux-ci ne l’associent ni à une phase de mise en commun, ni à une explicitation finale des connaissances en jeu dans la séance. Ainsi, de nombreux enseignants organiseraient des séances de recherche et de découverte sans capitaliser les résultats avec leurs élèves. Lorsque les élèves utilisent eux-mêmes la géométrie dynamique (59 % des enseignants travaillent avec leurs élèves dans un laboratoire informatique ou avec un lot de tablettes ou d’ordinateurs portables), le déplacement n’est pas un point de vigilance des enseignants. En effet plus de 60 % de ces enseignants n’attirent jamais ou que très rarement l’attention de leurs élèves sur le déplacement des figures pour les tester ou bien pour obtenir des effets intéressants. Seulement 20 % d’entre eux le font à chaque fois qu’ils utilisent la géométrie dynamique avec leurs élèves, confirmant le décalage rapporté par les chercheurs, entre des pratiques effectives et celles identifiées comme pertinentes par la recherche. Enfin, le travail des élèves est encadré par des instructions sur une fiche d’activité (cela a été le cas au moins 3 fois depuis le début de l’année pour 52 % des enseignants et à chaque fois pour près de la moitié d’entre eux).

3. Des pratiques déclarées confirmant l’état des lieux de la recherche

En conclusion, le panorama des pratiques des enseignants qui se dégage de cette étude confirme les caractéristiques suivantes identifiées par la recherche : (i) la géométrie dynamique est une technologie très bien identifiée par les enseignants ; (ii) une majorité d'enseignants fait en sorte que les élèves utilisent eux-mêmes la géométrie dynamique, mais sans que le recours au déplacement des points géométriques des figures ne soit un point de vigilance, ni que les séances ne soient conclues par une mise en commun ou un bilan des résultats à retenir ; (iii) les enseignants ne sont pas tous formés à son usage et dans ce contexte, les ressources qu'ils développent et cumulent au fur et à mesure des années d'exercice sont une ressource précieuse. Ainsi, les travaux de recherche centrés sur ces ressources et l'articulation entre travail individuel et travail collectif des enseignants dans la conception et l'usage de ces ressources, lors de formation ou pas, devraient éclairer notre compréhension de la situation.

C. Collectifs d'enseignants, de formateurs et de chercheurs

La nécessité de former les enseignants à l'utilisation des technologies a été identifiée comme un facteur clef de son utilisation, en particulier en géométrie dynamique (Laborde & Laborde, 2008) et a donné lieu à de nombreuses initiatives au niveau international comme par exemple *ICT and Mathematics Learning* (Fuglestad, Healy, Kynigos & Monaghan, 2010), AProvaME (Healy, Jahn & Bolite-Frant, 2009), M@t.abel (Arzarello *et al.*, 2012) et en France le SFoDEM – Suivi de formation à distance pour les professeurs de mathématiques (Guin, Joab & Trouche, 2008). Ces programmes ont en commun d'avoir réuni des enseignants, des formateurs et des chercheurs, autour de projets de conception de ressources et de considérer les enseignants comme des acteurs essentiels du processus de conception au sein des collectifs.

Ce point de vue sur les collectifs de concepteurs et d'utilisateurs qui créent et utilisent ces ressources et sur les processus de conception et d'usage a fait apparaître de nouveaux moyens pour favoriser l'appropriation et l'usage des technologies, au-delà du cadre des formations. Dès les années 2000, des projets impliquant des enseignants du terrain, au niveau primaire et/ou secondaire, des formateurs et des chercheurs, dans la production et l'analyse des ressources ont été lancés (par exemple avec l'ERTe MAGI[8] (Laborde, 2004 ; Assude, Grugeon, Laborde & Soury-Lavergne, 2006)). En 2010, les questions de mutualisation et de qualité des ressources de géométrie dynamique ont mobilisé des collectifs d'enseignants et de chercheurs (projet européen Intergeo (Kortenkamp & Laborde, 2011)). Ces travaux mettent en évidence certains principes à suivre pour favoriser l'appropriation d'une technologie et son intégration dans les pratiques, dont leur élaboration par des collectifs d'utilisateurs impliqués dès la conception de la technologie et des ressources.

1. Formation et collectifs d'enseignants, de formateurs et de chercheurs

Des dispositifs de formation ont été organisés sur la base de collectifs enseignants, formateurs et chercheurs, comme dans le programme national Pairform@nce déployée par le ministère de 2007 à 2013. Basé sur l'utilisation d'une plateforme de formation, les principes retenus par Pairform@nce pour la formation continue aux technologies correspondaient à une hybridation à différents niveaux : une hybridation des différents acteurs avec un accent mis sur la collaboration entre pairs, une hybridation des activités de formation en présence et à distance et une hybridation du travail dans et hors la classe avec une conception collaborative de situations, testées en classe puis analysées au sein du collectif. Le programme reposait en outre sur l'hypothèse que des parcours de formation pouvaient être conçus et mutualisés sur la plateforme pour ensuite être utilisés par des formateurs ne les ayant

[8] MAGI a été une équipe de recherche technologique en éducation intitulée Mieux Apprendre la Géométrie avec l'Informatique qui a fonctionné de 2003 à 2010.

pas conçus. La recherche qui a accompagné le déploiement de ce programme ambitieux a étudié les processus de conception des parcours en ligne et de leur instanciation dans des formations en académie, notamment sur plusieurs parcours en géométrie dynamique (Gueudet, Soury-Lavergne & Trouche, 2008 ; Soury-Lavergne, Gueudet & Trouche, 2009 ; Soury-Lavergne, Gueudet, Loisy & Trouche, 2011 ; 2013). À partir d'une méthodologie cohérente avec les principes du programme, reposant sur des collectifs de formateurs et chercheurs qui co-construisent des parcours, les partagent et les utilisent pour mettre en œuvre des formations, la recherche a identifié les difficultés du formateur engagé dans ce programme, au moins égales à celle de l'enseignant (Gueudet, Sacristan *et al.*, 2012). Le recueil de données sur un temps long a révélé la difficulté d'appropriation de ressources et des parcours de formation par un formateur qui ne les a pas lui-même conçus et utilisés. Une des explications avancées est qu'un formateur expert a déjà développé un système de ressources pour la formation, associé à une façon de l'exploiter pour un objectif donné. Cela rend coûteuse la substitution d'une de ses ressources par une autre. Les parcours de formation d'enseignants sont des instruments de formation de formateurs. Il s'agit d'un outil de génération de ressources, plutôt que de ressources directement utilisables. L'appropriation d'un parcours de formation par un formateur ne l'ayant pas conçu n'a été possible que grâce à l'engagement des participants au sein du collectif et aux interactions, provoquées, soutenues et structurées par le dispositif de la recherche. En conclusion, si le développement professionnel des enseignants est analogue à celui des formateurs, c'est-à-dire qu'il résulte de leur participation à un collectif de travail produisant des ressources, une piste de solution est de susciter le travail collectif chez les enseignants. Les questions posées par les processus d'appropriation des ressources par les formateurs sont finalement analogues à celles pour les enseignants. À quelle condition l'utilisation et la réutilisation de ressources de géométrie dynamique par des enseignants ne les ayant pas conçues est-elle possible ?

2. Développement professionnel dans les collectifs

Certaines difficultés rencontrées par les enseignants ne sont pas surmontées par la seule formation, comme par exemple celles relatives à la disponibilité et à la qualité des ressources sur internet. Le problème qu'ils rencontrent n'est pas le manque d'accès à des ressources de qualité mais plutôt la difficulté de pouvoir les identifier facilement parmi les innombrables ressources disponibles (271 000 résultats pour la requête « théorème de Pythagore géométrie dynamique » avec le moteur de recherche Bing[9]). Lorsqu'ils cherchent des ressources, les enseignants ont des difficultés à identifier des ressources qui soient adaptées à leur contexte d'enseignement, d'une qualité suffisante pour permettre les apprentissages et qu'ils pourront s'approprier. Avec le projet européen Intergeo (Kortenkamp & Laborde, 2011), la solution expérimentée a été de proposer une plateforme ouverte et informelle dédiée à la géométrie dynamique[10], contrôlée par la communauté de ses utilisateurs, sans imposer de critères a priori sur les ressources acceptées afin de s'affranchir des contraintes d'évaluation de leur conformité aux objectifs du projet. Les outils de la plateforme pour gérer *a posteriori* ces ressources et identifier les plus pertinentes permettent de rendre performante une telle collection inorganisée et hétérogène. Par exemple, une ontologie des compétences permet d'identifier les ressources, indépendamment de la langue, des curriculums et du logiciel. La plateforme est dotée d'un processus d'évaluation de la qualité qui s'appuie sur le collectif d'utilisateurs, en les outillant didactiquement (Trgalova *et al.*, 2011). Dans Intergeo, la qualité n'est pas une valeur intrinsèque de la

[9] Le 8 mai 2020, avec le moteur Bing.

[10] http://i2geo.net/

ressource, en particulier didactique, mais un processus évolutif, tenant compte des usages effectifs et des contextes d'utilisation (Trgalova, Jahn, & Soury-Lavergne, 2009). En effet, une même ressource peut être simultanément utilisable et adaptée à un contexte et pas du tout dans un autre, car cela dépend des attentes institutionnelles, du système scolaire, des compétences de l'utilisateur ou tout simplement du niveau scolaire considéré. L'utilisateur, le contexte d'utilisation et la possibilité d'évolution et de transformation d'une ressource apparaissent alors comme différentes dimensions complémentaires de la qualité de cette ressource, au-delà de ses propriétés intrinsèques. Ces dimensions ont été implémentées dans le questionnaire qualité soumis aux utilisateurs de la plateforme. Basé également sur des critères didactiques, ce processus d'évaluation de la qualité a fonctionné comme un moyen de développement professionnel, complémentaire à la formation dans le cadre d'un groupe IREM[11] et aurait pu potentiellement toucher un public plus large (Soury-Lavergne, Jahn & Trgalova, 2011). Bien que n'ayant pas abouti à une diffusion généralisée de l'usage de la plateforme au-delà du cadre du projet[12], ces propositions sont toujours d'actualité.

D. Actions possibles pour accompagner l'évolution des pratiques

La recherche a permis d'identifier les bonnes pratiques relatives à la géométrie dynamique et de comprendre en quoi cette identification et leur communication s'avère insuffisante pour faire évoluer les pratiques des enseignants. Selon notre étude menée en 2019, si 75 % des enseignants déclarent utiliser la géométrie dynamique en classe, et bien que 55 % d'entre eux aient suivi une formation, ils n'exploitent toujours pas au mieux les potentialités de cette technologie. Ainsi, le lien entre pratique et formation doit continuer à être étudié, de même que le développement professionnel des enseignants en dehors de la formation, au sein de collectifs de concepteurs et d'utilisateurs de la géométrie dynamique. Cela est cohérent avec le fait que 60 % des enseignants déclarent qu'ils ont conçu personnellement la majorité ou quasiment toutes leurs ressources de géométrie dynamique. La poursuite de la formation, pour toucher l'ensemble des enseignants, associée au développement de collectifs de concepteurs et d'utilisateurs semble la piste à poursuivre et fait l'objet des recherches les plus récentes (Gitirana *et al.*, 2018).

Conclusion

Les travaux de recherche présentés dans ce rapport ont mis en évidence le potentiel des technologies numériques pour faire apprendre les mathématiques dans le cas particulier de la géométrie dynamique. L'utilité de la géométrie dynamique pour faire apprendre, qui réside principalement dans les rétroactions obtenues grâce au déplacement, en complément de son intérêt concret pour résoudre les problèmes et produire des figures géométriques, justifie son utilisation en classe. Ces travaux ont aussi décrit les conditions permettant ces apprentissages. Mais finalement, la transformation profonde de l'enseignement des mathématiques à l'école, grâce à la technologie, n'a toujours pas eu lieu et la déclaration d'Artigue de 2010 reste vraie en 2019 : « *l'intégration technologique réussie à large échelle*

[11] Les IREM sont les Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques. Présents dans une université par académie, ils regroupent des enseignants et des chercheurs pour conduire des recherches et concevoir des ressources pour l'enseignement des mathématiques.

[12] Au 30 mars 2017, la plateforme rassemblait 3 956 ressources, 5 829 membres et 888 évaluations.

est encore un problème majeur, et cela semble être un phénomène général »[13] (2010, p. 472). La géométrie dynamique et le rôle qu'elle a eu pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie sont, à ce titre, exemplaires. Ils permettent de comprendre les dynamiques des pratiques enseignantes et leur évolution, bien que lente, à la convergence des actions de formation et de l'émergence de collectifs de concepteurs et d'utilisateurs de ressources.

[13] Conférence de clôture de l'étude de l'*International Commission on Mathematical Instruction* d'Hanoi en décembre 2006, notre traduction de : « *successful technological integration at large scale level is still a major problem, and this seems to be a general phenomenon* » (Artigue, 2010, p. 472).

Références

Abboud Blanchard, M. (2013). *Technology in mathematics education. Study of teachers' practices and teacher education. Syntheses and new perspectives.* (Habilitation à diriger des recherches). Université Paris-Diderot, Paris. Consulté à l'adresse https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00846323

Abboud, M., Clark-Wilson, A., Jones, K. & Rogalski, J. (2018). Analysing teachers? classroom experiences of teaching with dynamic geometry environments: comparing and contrasting two approaches. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 93–118.

Abboud, M. & Rogalski, J. (2017). Des outils conceptuels pour analyser l'activité de l'enseignant ordinaire utilisant des technologies en classe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *37*(1–2).

Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., … Soury-Lavergne, S. (2013). The Meta-Didactical Transposition: A Model for Analysing Teachers Education Programs. In *Proceedings of PME 37*. Kiel, Germany.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Artigue, M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, p. 463–475). Boston, MA: Springer US. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_23

Arzarello, F., Bernardi, C., Borgi, R., Ciarrapico, L., De Sanctis, F., Baker, M., … Zan, R. (2012). *m@t.abel. Matematica per gli studenti alla soglia del terzo millennio*. Florence : INDIRE-ANSAS. Consulté à l'adresse http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Assude, T. (2007). Modes et degrés d'intégration de Cabri dans les classes de primaire. In R. Floris & F. Conne (Éd.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (p. 119-134). Paris.

Assude, T., Grugeon, B., Laborde, C., & Soury-Lavergne, S. (2006). Study of a teacher professional problem: how to take into account the instrumental dimension when using Cabri-geometry? In C. Hoyles, J.-B. Lagrange, S. Le Hung, & N. Sinclair (Éd.), *Proceedings of ICMI Sudy 17 Technology revisited* (Vol. 2, p. 317–333). Hanoi Vietnam. Consulté à l'adresse http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Digital_Library/icmi-study-17/ICMI17proceedingsPart2.pdf

Balacheff, N. (1999). Apprendre la preuve. In J. Sallantin & J.-J. Szczeciniarz (Éd.), *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* (p. 197-236).

Balacheff, N. (2017). Seymour Papert (1928-2016) Aux sources d'une pensée innovante et engagée. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *37*(2-3).

Baulac, Y., Bellemain, F., & Laborde, J.-M. (1988). *Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, logiciel et manuel d'utilisation*. Paris : Cedic-Nathan.

Bellemain, F. (2014). Analise de ambientes de geometria dinamica colaborativa do ponto de vista da orquestração instrumental. *Nuances : estudos sobre Educação*, *25*(2), 18–38. https://doi.org/10.14572/nuances.v25i2.2936

Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Cahiers du laboratoire Leibniz*, *91*. Consulté à l'adresse https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00078794/document

Bombrun, C., & Thomas, R. (2014). GeoGebra entre cour de récréation et feuille de papier : illustration avec le concept de cercle au cycle 3. Présenté à XXXXe colloque de la COPIRELEM, Nantes : IREM des pays de la Loire.

Brice, L., Croutte, P., Jauneau-Cotte, P. & Lautié, S. (2015). *Baromètre du NUMERIQUE édition 2015, rapport pour le CGE et l'ARCEP* (p. 170). CREDOC. Consulté à l'adresse http://www.arcep.fr/uploads/tx_gspublication/CREDOC-Rapport-enquete-diffusion-TIC-France_CGE-ARCEP_nov2015.pdf

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Butler, D., Jackiw, N., Laborde, J.-M., Lagrange, J.-B. & Yerushalmy, M. (2010). Design for Transformative Practices. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Springer, p. 425–462).

Capponi, B. & Laborde, C. (1994). *Cabri-classe, Apprendre la géométrie avec un logiciel*. Argenteuil: Éditions Archimède.

Chan, K. K. & Leung, S. W. (2014). Dynamic Geometry Software Improves Mathematical Achievement: Systematic Review and Meta-Analysis. *Journal of Educational Computing Research*, *51*(3), 311-325.

Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété.* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

CREEM. (1992). *Activités mathématiques avec imagiciels, classes de premières et terminales cinq volumes, volume 5 Geoplan*. CRDP de Poitou-Charentes.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(3), 453–470.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5–31.

Drijvers, P. (2012). Digital Technology in Mathematics Education: Why it Works (or doesn't). Présenté à 12th ICME, Seoul, Korea. Consulté à l'adresse http://www.icme12.org/upload/submission/2017_f.pdf

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213–234.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *10*, 5–53.

Duval, R. & Godin, M. (2006). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, *76*, 7–27.

Fuglestad, A. B., Healy, L., Kynigos, C. & Monaghan, J. (2010). Working with Teachers: Context and Culture. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Éd.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, p. 293–310). Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_13

Gawlick, T. (2004). Towards a Theory of Vizualization by Dynaic Geometry Software Pardigms, Phenomena, Principles.

Genevès, B. (2004). *Vers des spécifications formelles : Fondements Mathématiques et Informatiques pour la Géométrie Dynamique* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier - Grenoble I.

Gitirana, V., Miyakawa, T., Rafalska, M., Soury-Lavergne, S. & Trouche, L. (Éds.). (2018). Understanding Teachers' work through their interactions with resources for teaching. In *Res(s)ources 2018 International Conference*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01764563

Grugeon-Allys, B. (2008). Pratiques d'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique à l'école élémentaire. *Carrefours de l'éducation*, *25*(1), 75–90. https://doi.org/10.3917/cdle.025.0075

Gueudet, G., Pepin, B. & Trouche, L. (Éd.). (2012). *From text to « lived » resources: mathematics curriculum materials and teacher development*. Dordrecht: Springer.

Gueudet, G., Sacristan, A.-I., Soury-Lavergne, S. & Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: new resources and new skills for teacher educators. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *44*, 717–731. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0424-z

Gueudet, G., Soury-Lavergne, S. & Trouche, L. (2008). *Pairform@nce. Parcours de formation en ligne, quels assistants méthodologiques ?* Lyon : INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Education Nationale. Consulté à l'adresse hal-00988911, v1.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. *Education & Didactique*, *2*(3), 7–33.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 199–218.

Guin, D., Joab, M. & Trouche, L. (Éd.). (2008). Conception collaborative de ressources pour l'enseignement des mathématiques, l'expérience du SFoDEM (2000 - 2006), cédérom. INRP et IREM Université Montpellier 2.

Haspekian, M. (2014). Teachers' Instrumental Geneses When Integrating Spreadsheet Software. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Éd.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, p. 241–275). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_11

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Éd.), *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 103–117). Hiroshima: Hiroshima University.

Healy, L., Jahn, A. P. & Bolite-Frant, J. (2009). Developing cultures of proof practices amongst Brazilian mathematics teachers. In Fou-lai Lin, Feng-Jui Hsieh, H. Gila, & M. de Villiers (Éd.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Taipei: National Taiwan Normal University.

Healy, L. & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education. *ZDM*, *42*(1), 63–76. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0193-5

Hölzl, R. (1996). How does « dragging » affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *1*(2), 169–187.

Hoyles, C. & Lagrange, J.-B. (Éd.). (2010). *Mathematics education and technology: rethinking the terrain: the 17th ICMI study*. New York: Springer.

Jackiw, N. (1989). *The Geometer's Sketchpad (Computer Software).* Berkeley: Key Curriculum Press.

Jackiw, N. (2013). Touch and multitouch in dynamic geometry: Sketchpad explorer and "digital" mathematics. In E. Faggiano & A. Montone (Éd.) (p. 149– 155). Présenté à Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Bari, Italy.

Komatsu, K. & Jones, K. (2018). Task Design Principles for Heuristic Refutation in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9892-0

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* (PhD Thesis). Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

Kortenkamp, U. & Laborde, C. (2011). Interoperable Interactive Geometry for Europe: an introduction. *ZDM*, *43*(3), 321–323. https://doi.org/DOI 10.1007/s11858-011-0340-7

Kynigos, C. (2015). Designing Constructionist New Mediations for Creative Mathematical Thinking? *Constructivist Foundations*, *10*(3), 305–313.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 151–161.

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *6*(3), 283–317.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. In *Electronic Proceedings of ATCM*. Consulté à l'adresse http://epatcm.any2any.us/EP/EP2003/index.html

Laborde, C. (2004). Come la geometria dinamica puo rinnovare i processi di mediazone delle conoscenze matematiche nella scuola primaria. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Éd.), *La didattica della matematica: una scienza per la scuola* (p. 19–28). Bologna.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In W.-C. Y. Sung-Chi Chu, Hee-Chan Lew (Éd.), *10th Asian Technology Conference in Mathematics* (p. 22–36). Cheong-Ju, South Korea: Korea: Korea National University of Education.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1.2), 165–210.

Laborde, C. & Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry enviroment Cabri-Géomètre. In M. Heid & G. Blume (Éd.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (p. 31–52).

Laborde, C. & Laborde, J.-M. (2011). Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean? In *Integration of Technology into Mathematics Education: past, present and future*

Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in MathematicsTCM. Bolu, Turkey. Consulté à l'adresse http://atcm.mathandtech.org/EP2011/invited_papers/3272011_19113.pdf

Lai, K. & White, T. (2014). How groups cooperate in a networked geometry learning environment. *Instructional Science*, (42(4)), 615–637.

Leung, A. & Baccaglini-Frank, A. (Éd.). (2016). *Digital technologies in designing mathematics education tasks*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg.

Leung, A., Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), pp. 439–460. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9492-4

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. In A. Watson & M. Ohtani (Éd.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 191–225). Cham: Springer International Publishing. Consulté à l'adresse http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-09629-2_6

Lima, I. (2006). *De la modélisation de connaissances des élèves aux décisions didactiques des professeurs : étude didactique dans le cas de la symétrie orthogonale* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Consulté à l'adresse http://www.theses.fr/2006GRE10055/document

Margolinas, C. (Éd.) (2013). *ICMI Study 22 Task Design in Mathematics Education*. Oxford, Royaume-Uni.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, pp. 25–53.

Martin, Y. (2010). CaRMetal, une géométrie dynamique enrichie. *Expressions*, *35*, pp. 165–272.

MEN-DNE (2016). *Enquête PROFETIC 2016 auprès de 5000 enseignants du 2d degré* (p. 88). DNE Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. Consulté à l'adresse http://cache.media.eduscol.education.fr/file/ETIC_et_PROFETIC/15/4/PROFETIC_2016_-_Rapport_complet_648154.pdf

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France. Consulté à l'adresse

https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/590941/filename/these_mithalal.pdf

Mithalal, J. & Balacheff, N. (2018). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9862-z

Mithalal, J. & Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(2), 161–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9862-z

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: learning cultures and computers*. Dordrecht; Boston: Kluwer Academic Publishers.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment* (PhD Thesis). Graduate School of Education, Bristol.

Papert, S. (1980). *Mindstorms. Children, computers, and powerful ideas.* New York: Basic Books.

Pea, R. D. (1985). Beyond Amplification: Using the Computer to Reorganize Mental Functioning. *Educational Psychologist*, *20(4)*, 167–182.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathe, A.-C. & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, *90*, pp. 5–41.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France : Armand Colin.

Rabardel, P. (1999). Elements pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Éd.), *Evolution des pratiques des enseignants de mathématiques ; Role des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques ?* (p. 203–213). Houlgate France : IUFM académie de Caen.

Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e* (Thèse de doctorat). Joseph Fourier. Consulté à l'adresse http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/42/53/PDF/These-Restrepo.pdf

Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (1999). The interactive geometry software Cinderella. Book & CD-ROM (Version First commercial release of the Cinderella software). Berlin: Springer-Verlag.

Rolet, C. (2003). Teaching And Learning Plane Geometry In Primary School: Acquisition Of A First Geometrical Thinking. Présenté à CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy. Consulté à l'adresse http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/

Ruthven, K., Hennessy, S., & Deaney, R. (2008). Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice. *Computers & Education*, *51*(1), pp. 297–317. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2007.05.013

Sinclair, N. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, pp. 289–317.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, *48*(5), pp. 691–719. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6

Sinclair, N. & Robutti, O. (2012). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Éd.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 571–596). New York, NY: Springer New York. Consulté à l'adresse http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Soury-Lavergne, S. (1998). *Étayage et explication dans le préceptorat distant, le cas de TéléCabri* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l'initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Éd.), *Espace Mathématique Francophone EMF2006*. Sherbrooke Canada : Université de Sherbrooke.

Soury-Lavergne, S. (2007). Utilisation de la géométrie dynamique pour l'introduction du raisonnement déductif en sixième : instrumentation du déplacement des figures. In G. Gueudet & Y. Matheron (Éd.), *Actes du Séminaire national l'association pour la recherche en didactique des mathématiques*. Paris France.

Soury-Lavergne, S. (2011). De l'intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27). Consulté à l'adresse http://revue.sesamath.net/spip.php?article364

Soury-Lavergne, S. (2014). Les technologies pour la géométrie à l'école primaire. In *XXXX^e^ colloque de la COPIRELEM* (pp. 44–56). Nantes, France : IREM des pays de la Loire.

Soury-Lavergne, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques.* (HDR). ENS de Lyon, Lyon, France.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C. & Trouche, L. (2011). *Recherche INRP-Pairform@nce. Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires : suivi et analyse*. Lyon : INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Education Nationale. Consulté à l'adresse hal-00988915, v1.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G., Loisy, C. & Trouche, L. (2013). *Le travail collectif et les pratiques réflexives au cœur des dispositifs hybrides de formation : de Pairform@nce à M@gistère*. Lyon : IFE pour la SDTICE du Ministère de l'Education Nationale. Consulté à l'adresse hal-00988917, v1.

Soury-Lavergne, S., Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). *Recherche INRP-Pairform@nce. Parcours de formation en ligne, étude de processus d'appropriation*. Lyon : INRP pour la SDTICE du Ministère de l'Education Nationale. Consulté à l'adresse hal-00988913, v1.

Soury-Lavergne, S., Jahn, A.-P. & Trgalova, J. (2011). I2Geo quality assessment process: a tool for teacher professional development? *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, *5*(3), 261–275.

Soury-Lavergne, S. & Maschietto, M. (2012). Les stratégies du garagiste. *Cahiers pédagogiques Apprendre avec le numérique*, *498*, pp. 34–35.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *47*(3), pp. 435–449. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3

Soury-Lavergne, S. & Maschietto, M. (2019). Connaissances géométriques et connaissances spatiales dans les situations didactiques avec la technologie. In M.-J. Perrin-Glorian & V. Celi (Éd.). Présenté à 19^e^ Ecole d'Ete de Didactique des Mathématiques, Paris, France.

Tahri, S. (1993). *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse de décisions didactiques* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Tapan, S. (2006). *Etude de la formation initiale des enseignants à l'intégration des nouvelles technologies.* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier.

Trgalova, J., Jahn, A.-P. & Soury-Lavergne, S. (2009). Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergeo. In *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (pp. 922–934). Dakar Sénégal. Consulté à l'adresse http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT6/Groupe%20N%2006.html

Trgalova, J., Soury-Lavergne, S. & Jahn, A.-P. (2011). Quality assessment process for dynamic geometry resources in Intergeo project: rationale and experiments. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *43*(3), pp. 337–351.

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations* (Document pour l'habilitation à diriger des recherches). Paris 7, Paris, France. Consulté à l'adresse HAL. (hal-00190091)

Voltolini, A. (2017). *Duos d'artefacts matériel et numérique pour l'apprentissage de la géométrie* (Thèse de doctorat). Ecole Normale Supérieure de Lyon, Lyon.

Voltolini, A. (2018). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H.-S. Siller, M. Tabach, & C. Vale (Éd.), *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education: Tools, Topics and Trends* (pp. 83–99).

Le Centre national d’étude des systèmes scolaires (Cnesco) est un centre national d’évaluation, d’analyse et d’accompagnement des politiques, dispositifs et pratiques scolaires rattaché au Conservatoire national des arts et métiers (Cnam). Il vise à améliorer la connaissance des systèmes scolaires français et étrangers afin de créer des dynamiques de changement dans l’école.

Le Cnesco s’appuie sur un réseau scientifique de chercheurs français et étrangers issus de champs disciplinaires variés (didactique, sociologie, psychologie cognitive, économie, etc.).

Le Cnesco promeut une méthode participative originale, alliant l’élaboration de diagnostics scientifiques de haut niveau et la participation des acteurs de terrain de la communauté éducative.
Il accompagne ces acteurs grâce à des démarches de formation/action adaptées aux besoins locaux.